

고등학교

기하

지학사

수학은
보이지 않는 것을
볼 수 있게 만든다.

케이스 데블린(Keith James Devlin, 1947~)

출처: Keith James Devlin, 『The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible』, W. H. Freeman and Company, 2000



머리말

우리는 주변의 여러 현상과 상황 속에서 수, 도형, 자료, 또 이들 사이의 관계와 변화를 다루는 수학을 만납니다. 수학의 언어는 보이지 않는 것을 볼 수 있게 합니다. 건축 설계 및 시간과 공간, 운동과 변화 등 일상과 활동에서, 때로는 무질서하게 보이는 현상과 방대한 자료 속에서 수학의 언어는 상황을 해석하고 설명하며 문제를 해결할 수 있게 하는 중요한 도구입니다. 최근 주목받고 있는 인공지능(AI)의 기계 학습이나 딥 러닝을 위한 프로그램도 알고리즘 등 수학적 언어 발달이 이루어 낸 결과입니다.

수학은 문제해결을 위하여 고안된 학문이며, 학교 수학의 내용 중 맥락과 무관하게 생겨난 것은 없습니다. 수학의 언어는 만국 공통이며, 새로운 언어를 사용하려면 문법을 학습해야 하듯이 수학의 언어 사용을 위해서도 학습이 필요합니다. 우리는 학습을 통하여 수학의 여러 분야의 용어와 기호, 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여, 논리적으로 사고하고 소통하며 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있습니다.

이 교과서는 2022 개정 수학과 교육과정이 추구하는 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리 역량을 수학 교과 역량으로 설정하고, 공통수학1, 공통수학2, 대수, 미적분I, 확률과 통계를 기반으로 여러분의 수학적 능력과 태도를 확장하고 향상해 나갈 수 있도록 저술하였습니다. 학생들은 새로운 개념 학습을 탐구로 시작하여 맥락 안에서 수학적 언어를 익히며 수학적 지식의 발견과 이해, 기능의 습득과 활용에 참여하게 될 것입니다. 이 교과서는 탐구하는 수학, 수학 프로젝트 활동과 같이 자기주도적 활동을 포함하며 공학 도구의 적절한 사용으로 학습의 동기를 유발하고 실질적인 수학 탐구가 가능하도록 구성하였습니다.

지은이들은 이 교과서를 사용하는 여러분들이 수학의 언어로 사고하고 소통하며 수학적 역량과 창의적 인성을 갖춘 미래 사회의 주역으로 성장해 나가기를 기원합니다.

지은이 일동

우리 교과서는

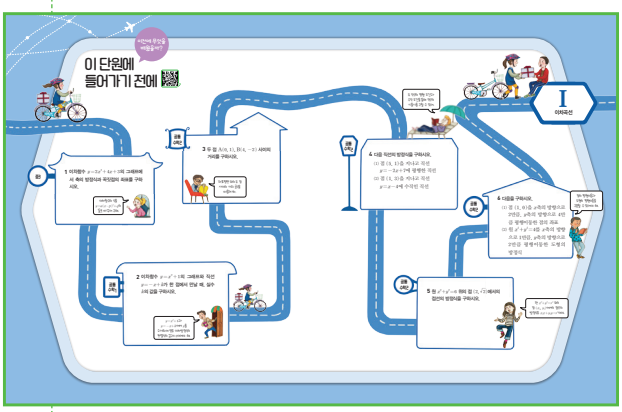
교육과정에 제시된 성취기준을 기준으로 대단원과 소단원으로 나누어 체계적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다. 또한, 소단원 중심의 학습 단위로 수학적 개념과 기능을 학습할 수 있고, 수학 교과 역량을 함양하고 범교과 학습 주제 및 타 교과 연계 학습이 가능하도록 구성하였습니다.

01 대단원 도입



대단원 도입

이 단원의 학습에 흥미를 가질 수 있도록 단원과 관계된 도입 글과 사진을 제시하여 학습에 대한 흥미를 유발하고 친밀성을 높였습니다.



이 단원에 들어가기 전에

이 단원에서 배울 내용의 기초가 되는 이전 학습 내용을 간단한 문제로 제시하여 스스로 학습 계획을 세울 수 있도록 하였습니다.

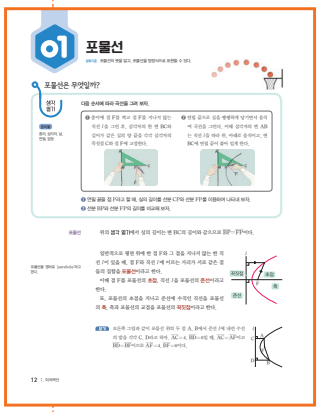
QR 코드

이 단원에 들어가기 전에
이전 학습 내용을 확인할 수 있는 개념과 문제가 있습니다.

스스로 확인하기/대단원 마무리 평가
학습을 스스로 점검할 수 있는 문제가 있습니다.

공학 도구 활용 동영상이 있습니다.

02 소단원 학습

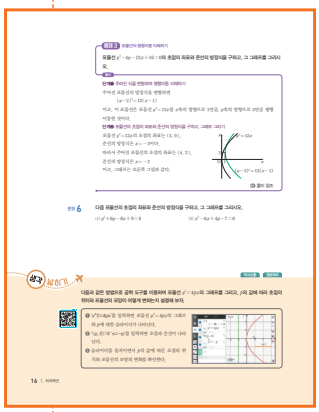


소단원 도입

이 단원에서 학습해야 할 성취기준을 명확히 제시하였습니다.

생각 열기

실생활 소재와 이미 학습한 내용을 토대로 앞으로 학습할 내용이 무엇인지 알 수 있도록 다양한 탐구 활동을 담았습니다.

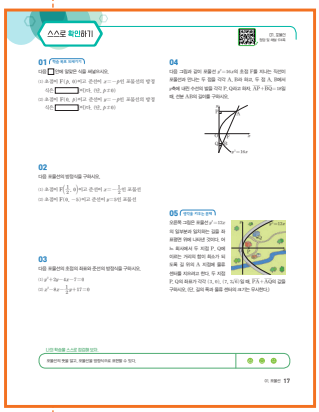


예제

개념 이해에 필요한 대표 문제와 모범 풀이를 담아 학습한 내용을 잘 이해하고 적용할 수 있도록 하였습니다.

생각 넓히기

소단원에서 학습한 내용을 다양한 상황으로 확장하여 범교과 학습 역량과 수학 교과 역량을 키울 수 있도록 하였습니다.



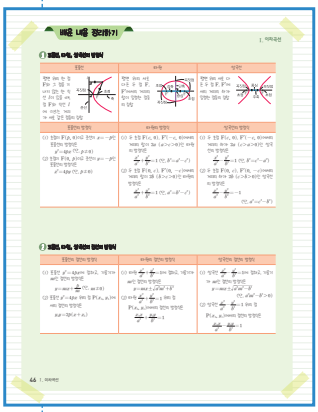
스스로 확인하기

소단원에서 학습한 내용을 스스로 정리하고 학습 결과를 확인할 수 있도록 기본 문제부터 응용 문제까지 다양하게 구성하였습니다.

핵심 아이디어와 **과정 · 기능, 가치 · 태도**에 기초한 **수학 교과 역량 함양 교과서**

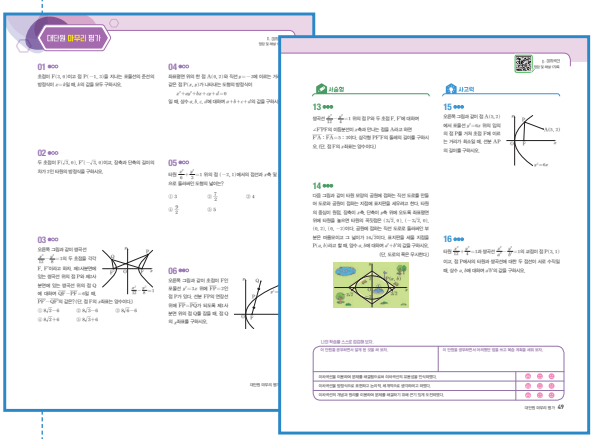
자기주도성, 창의와 혁신, 포용성과 시민성을 강조하는 **미래 지향적인 교과서**

03 대단원 마무리



배운 내용 정리하기

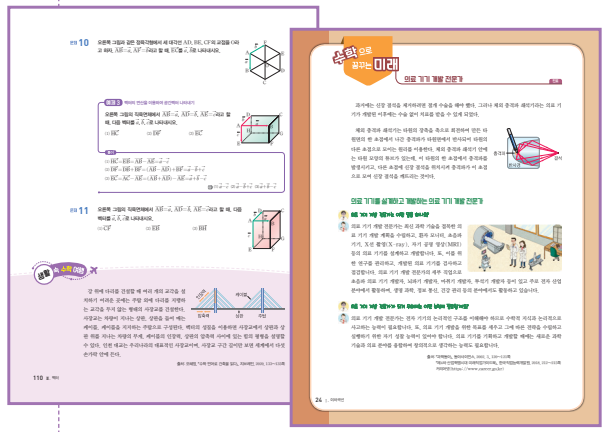
대단원에서 학습한 내용을 한눈에 볼 수 있도록 정리하여 이 단원에서 배운 내용을 되짚어 볼 수 있도록 하였습니다.



대단원 마무리 평가

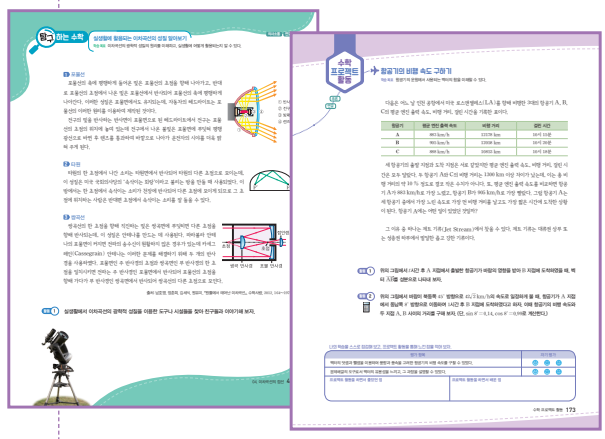
대단원에서 학습한 내용을 잘 마무리할 수 있도록 기본 문제부터 서술형 대비 문제와 사고력을 기를 수 있는 문제까지 다양한 형태로 구성하였습니다.

04 프로젝트 / 읽기 자료



○○ 속 수학 여행 / 수학으로 꿈꾸는 미래

다양한 분야의 재미있는 이야기들을 담아 수학에 대한 흥미를 높이고, 수학을 공부하고 그것이 어떤 직업으로 연결되는지 안내하여 수학의 필요성과 유용성을 이해하게 하였습니다.



탐구하는 수학

소단원에서 학습한 내용을 바탕으로 공학 도구를 이용하는 활동을 비롯하여 수학 내적, 외적으로 깊이 있는 학습을 할 수 있도록 다양한 형태의 활동을 제시하였습니다.

수학 프로젝트 활동

대단원에서 학습한 내용을 바탕으로 조사, 관찰, 실험, 분석, 발표 등의 다양한 활동을 할 수 있도록 구성하였습니다.

우리 교과서의

차례



취약한 부분을 스스로 확인하고 점검해 봐.



Ⅰ 이차곡선

01 포물선 ····· 12 ▸
02 타원 ····· 18 ▸
— 수학으로 꿈꾸는 미래 ····· 24
03 쌍곡선 ····· 25 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 34
04 이차곡선의 접선 ····· 35 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 45
배운 내용 정리하기 ····· 46
대단원 마무리 평가 ····· 47 ▸
수학 프로젝트 활동 ····· 50 ▸

Ⅱ 공간도형과 공간좌표

01 직선과 평면의 위치 관계 ····· 56 ▸
02 삼수선 정리 ····· 65 ▸
— 수학으로 꿈꾸는 미래 ····· 71
03 정사영 ····· 72 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 78
04 공간좌표 ····· 79 ▸
05 구의 방정식 ····· 87 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 91
배운 내용 정리하기 ····· 92
대단원 마무리 평가 ····· 93 ▸
수학 프로젝트 활동 ····· 96 ▸

Ⅲ 벡터

01 벡터의 뜻과 연산 ····· 102 ▸
02 위치벡터와 벡터의 성분 ····· 118 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 133
03 벡터의 내적 ····· 134 ▸
— 역사 속 수학 여행 ····· 145
04 직선의 방정식 ····· 146 ▸
05 평면과 구의 방정식 ····· 156 ▸
— 탐구하는 수학 ····· 167
배운 내용 정리하기 ····· 168
대단원 마무리 평가 ····· 169 ▸
수학 프로젝트 활동 ····· 172 ▸



+ 부록

정답 및 해설 ····· 174
찾아보기 ····· 198
자료 출처 ····· 199



I

이차곡선

01. 포물선

02. 타원

03. 쌍곡선

04. 이차곡선의 접선



이 단원에서는...

포물선, 타원, 쌍곡선의 뜻을 알고 방정식으로 표현해 보며, 이차곡선의 접선의 방정식을 배운다.

핵심 아이디어

원뿔을 절단하여 만든 곡선을 방정식으로 표현하는 것은 그 기하적 성질을 탐구하는 데 유용한 방법이다.

원뿔을 평면으로 잘라 생긴 단면의 둘레가 나타내는 곡선을 원뿔곡선이라고 한다. 고대 그리스의 수학자 메나이크모스(Menaechmos, B.C. 375?~B.C. 320?)는 꼭지각이 예각, 직각, 둔각인 원뿔을 모선에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에 나타나는 곡선이 각각 타원, 포물선, 쌍곡선이라는 것을 발견하였다. 고대 그리스의 수학자 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)는 원뿔의 모양과 상관없이 자르는 평면의 기울기를 조정해 원뿔곡선을 얻었고, 이를 연구하여 알게 된 여러 가지 사실들을 그의 저서 『원뿔곡선론』에 남겼다. 이후 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)에 의해 도입된 좌표평면에서 원뿔곡선은 x, y에 대한 이차방정식으로 표현되기 때문에 원뿔곡선을 이차곡선으로 부르기도 한다. 원뿔곡선은 천문, 건축, 의료 등 다양한 분야에 적용되어 실생활에 활용되고 있다.

출처: 『수학동아』, 동아사이언스, 2020. 3., 60~61쪽

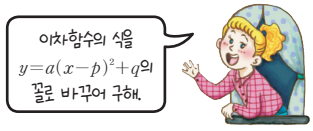


이전에 무엇을 배웠을까?

이 단원에 들어가기 전에

중3

1 이차함수 $y=2x^2+4x+3$의 그래프에서 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.



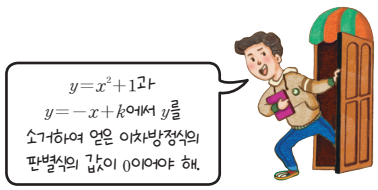
공통 수학2

3 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ -2)$ 사이의 거리를 구하시오.



공통 수학1

2 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 한 점에서 만날 때, 실수 k의 값을 구하시오.





I 이차곡선



공통 수학2

4 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(5, 1)$을 지나고 직선 $y=-2x+7$에 평행한 직선

(2) 점 $(1, 3)$을 지나고 직선 $y=x-4$에 수직인 직선

공통 수학2

6 다음을 구하시오.

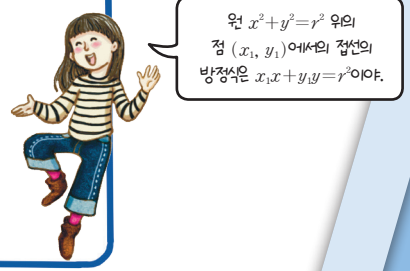
(1) 점 $(1, 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표

(2) 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식



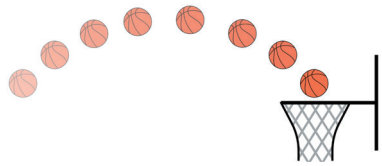
공통 수학2

5 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점 $(2, \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식을 구하시오.



01 포물선

성취기준 포물선의 뜻을 알고, 포물선을 방정식으로 표현할 수 있다.



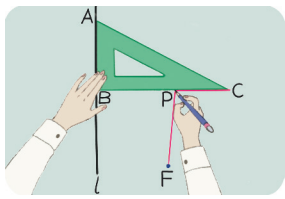
포물선은 무엇일까?

생각 열기

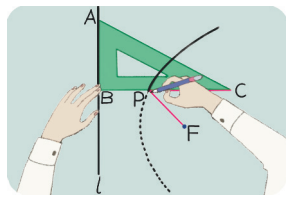
준비물
종이, 삼각자, 실, 연필, 압정

다음 순서에 따라 곡선을 그려 보자.

❶ 종이에 점 F를 찍고 점 F를 지나지 않는 직선 l을 그린 후, 삼각자의 한 변 BC와 길이가 같은 실의 양 끝을 각각 삼각자의 꼭짓점 C와 점 F에 고정한다.



❷ 연필 끝으로 실을 팽팽하게 당기면서 움직여 곡선을 그린다. 이때 삼각자의 변 AB는 직선 l을 따라 위, 아래로 움직이고, 변 BC에 연필 끝이 붙어 있게 한다.



❶ 연필 끝을 점 P라고 할 때, 실의 길이를 선분 CP와 선분 FP를 이용하여 나타내 보자.

❷ 선분 BP와 선분 FP의 길이를 비교해 보자.

포물선

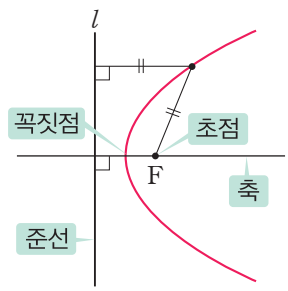
위의 **생각 열기**에서 실의 길이는 변 BC의 길이와 같으므로 $\overline{BP}=\overline{FP}$이다.

포물선을 영어로 'parabola'라고 한다.

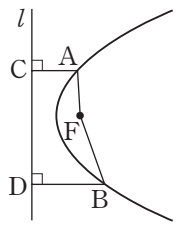
일반적으로 평면 위에 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 서로 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.

이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라고 한다.

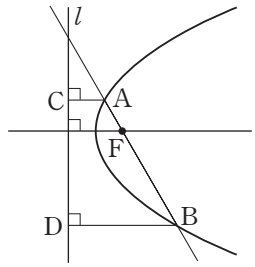
또, 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 축과 포물선의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.



보기 오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자. $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=6$일 때, $\overline{AC}=\overline{AF}$이고 $\overline{BD}=\overline{BF}$이므로 $\overline{AF}=4$, $\overline{BF}=6$이다.



문제 1 오른쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자. $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=12$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

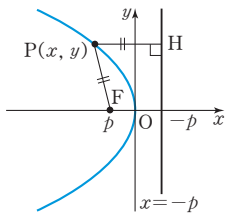


포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

좌표평면에서 점 $F(p, 0)$ $(p\neq 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

$p<0$



포물선 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(-p, y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

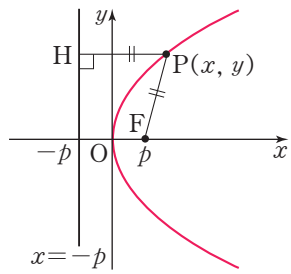
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

$p>0$



역으로 점 $P(x, y)$가 방정식 ①을 만족시키면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로 점 P는 초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$$y^2=4px \text{ (단, } p\neq 0)$$

포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y=0$이다.

보기 초점이 $F(1, 0)$이고 준선이 $x=-1$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$에서 $p=1$이므로

$y^2=4\times 1\times x$, 즉 $y^2=4x$

문제 2 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(4,\ 0)$이고 준선이 $x=-4$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$이고 준선이 $x=3$인 포물선

예제 1 초점이 x축 위에 있는 포물선의 방정식 이해하기

포물선 $y^2=8x$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

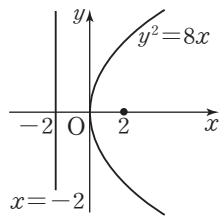
풀이

$y^2=8x=4\times2\times x$이므로 $p=2$

따라서 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$,

준선의 방정식은 $x=-2$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 3 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $y^2=6x$ (2) $y^2=-2x$

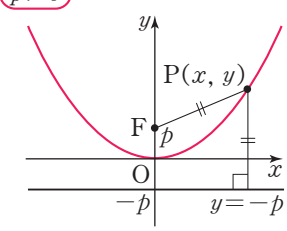
초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(0,\ p)\ (p\neq0)$를 초점으로 하고 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 포물선의 정의를 이용하여 구하면

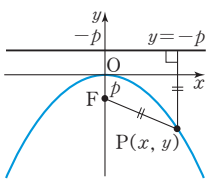
$$x^2=4py$$

이다.

$p>0$



$p<0$



이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식

초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

$$x^2=4py \text{ (단, } p\neq0)$$

포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $x=0$이다.

보기 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 2)$이고 준선이 $y=-2$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$에서 $p=2$이므로

$x^2=4\times2\times y$, 즉 $x^2=8y$

문제 4 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 3)$이고 준선이 $y=-3$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$이고 준선이 $y=\frac{1}{4}$인 포물선

예제 2 초점이 y축 위에 있는 포물선의 방정식 이해하기

포물선 $x^2=4y$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

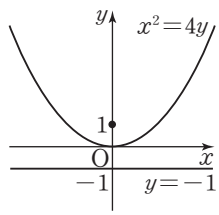
풀이

$x^2=4y=4\times1\times y$이므로 $p=1$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$,

준선의 방정식은 $y=-1$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

문제 5 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $x^2=5y$ (2) $x^2=-3y$

평행이동한 포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

포물선의 평행이동

배운 내용 떠올리기

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-m,\ y-n)=0$

포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다.

이때 이 포물선의

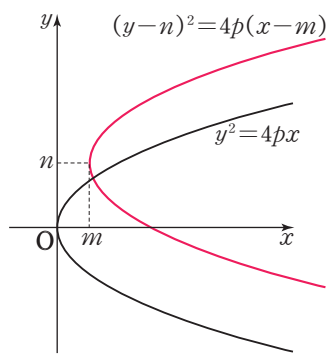
꼭짓점의 좌표는 $(m,\ n)$,

초점의 좌표는 $(p+m,\ n)$,

준선의 방정식은 $x=-p+m$,

축의 방정식은 $y=n$

이다.



예제 3 포물선의 평행이동 이해하기

포물선 $y^2-4y-12x+16=0$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

단계❶ 주어진 식을 변형하여 평행이동 이해하기

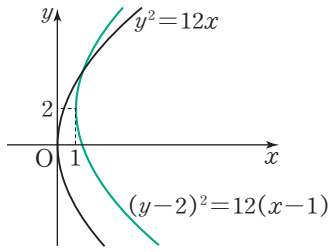
주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$$(y-2)^2=12(x-1)$$

이고, 이 포물선은 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

단계❷ 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그래프 그리기

포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표는 $(3, 0)$,
준선의 방정식은 $x=-3$이다.
따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(4, 2)$,
준선의 방정식은 $x=-2$
이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 6 **다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

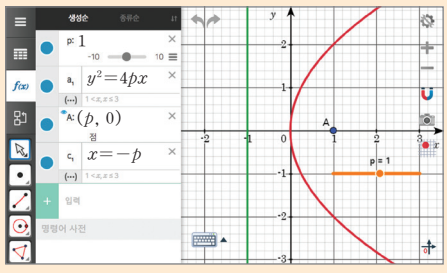
(1) $y^2+6y-8x+9=0$ (2) $x^2-6x+4y-7=0$

생각 넓히기

의사소통 정보처리

다음과 같은 방법으로 공학 도구를 이용하여 포물선 $y^2=4px$의 그래프를 그리고, p의 값에 따라 초점의 위치와 포물선의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.

❶ 'y^2=4px'를 입력하면 포물선 $y^2=4px$의 그래프와 p에 대한 슬라이더가 나타난다.
❷ '(p, 0)'과 'x=-p'를 입력하면 초점과 준선이 나타난다.
❸ 슬라이더를 움직이면서 p의 값에 따른 초점의 위치와 포물선의 모양의 변화를 확인한다.



스스로 확인하기

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 식을 써넣으시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 [ ]이다. (단, $p\neq 0$)

(2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 [ ]이다. (단, $p\neq 0$)

02

다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{2}$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}(0,\ -5)$이고 준선이 $y=5$인 포물선

03

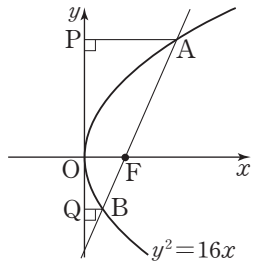
다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

(1) $y^2+2y-4x-7=0$

(2) $x^2-8x-\frac{1}{2}y+17=0$

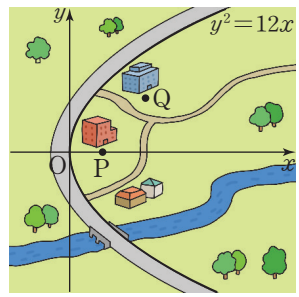
04

다음 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}=18$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



05 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림은 포물선 $y^2=12x$의 일부분과 일치하는 길을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 어느 회사에서 두 지점 P, Q에 이르는 거리의 합이 최소가 되도록 길 위의 A 지점에 물류센터를 지으려고 한다. 두 지점 P, Q의 좌표가 각각 $(3,\ 0)$, $(7,\ 2\sqrt{6})$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{AQ}}$의 값을 구하시오. (단, 길의 폭과 물류 센터의 크기는 무시한다.)



나의 학습을 스스로 점검해 보자.

포물선의 뜻을 알고, 포물선을 방정식으로 표현할 수 있다.	😀 🙂 😐

02 타원

성취기준 타원의 뜻을 알고, 타원을 방정식으로 표현할 수 있다.

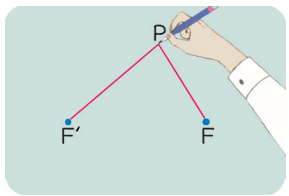
타원은 무엇일까?

생각 열기

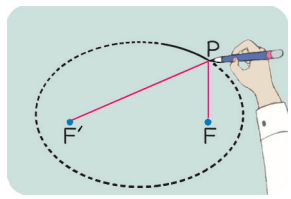
준비물
종이, 실, 연필, 압정

다음 순서에 따라 곡선을 그리고, 연필 끝을 점 P라고 할 때 $\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값이 변하는지 설명해 보자.

❶ 종이에 두 점 F, F′을 그린 후, 선분 FF′의 길이보다 긴 실의 양 끝을 각각 F, F′에 고정한다.



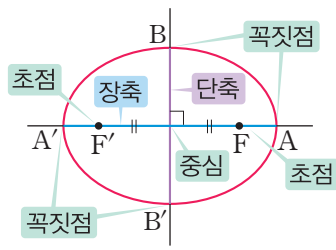
❷ 연필 끝으로 실을 팽팽하게 당기면서 움직여 곡선을 그린다.



타원 위의 **생각 열기**에서 $\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값은 실의 길이와 같으므로 이 값은 일정하다.

타원을 영어로 'ellipse'라고 한다.

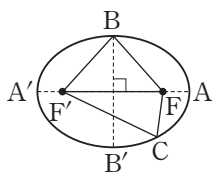
일반적으로 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라고 하며, 두 점 F, F′을 타원의 **초점**이라고 한다.



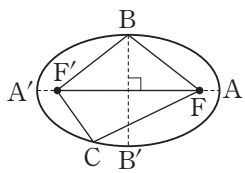


타원의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라고 할 때, 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′을 타원의 **장축**, 선분 BB′을 타원의 **단축**이라고 한다. 또, 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

보기 오른쪽 그림은 장축이 선분 AA′이고 단축이 선분 BB′이며 두 초점이 F, F′인 타원이다. $\overline{BF}+\overline{BF'}=6$일 때, 타원 위의 점 C에 대하여 $\overline{CF}+\overline{CF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=6$이다.



문제 1 **오른쪽 그림은 장축이 선분 AA′이고 단축이 선분 BB′이며 두 초점이 F, F′인 타원이다. 타원 위의 점 C에 대하여 $\overline{CF}+\overline{CF'}=10$일 때, 선분 BF의 길이를 구하시오.**

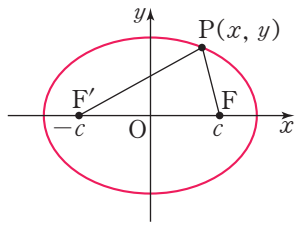


타원의 방정식은 어떻게 구할까?

초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하고 두 초점 F, F′에서의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2a$이므로



$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$
$\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다. 이때 $a>c>0$이므로 $a^2-c^2=b^2$으로 놓고 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (b^2=a^2-c^2) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$의 두 초점과 장축은 x축 위에 있다.

역으로 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 방정식 ①을 만족시키면 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2a$이므로 점 P는 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 타원의 방정식이다.

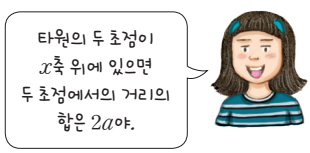
이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b^2=a^2-c^2)$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.



보기 두 초점 $\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F}'(-4, 0)$에서의 거리의 합이 10인 타원의 방정식은 $2a=10$에서 $a=5$이고, $c=4$에서 $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9$이므로 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이다.

문제 2 다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$에서의 거리의 합이 8인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$에서의 거리의 합이 12인 타원



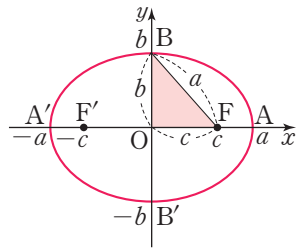
오른쪽 그림과 같은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라고 하면 $b^2=a^2-c^2$에서 $c=\sqrt{a^2-b^2}$이므로 두 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

이다. 또, 타원의 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

이고, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.



예제 1 초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식 이해하기

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

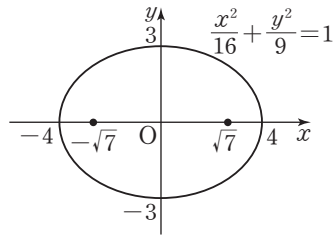
$a=4$, $b=3$이므로 $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{7},\ 0)$, $(-\sqrt{7},\ 0)$,

장축의 길이는 $2a=8$,

단축의 길이는 $2b=6$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 3 **다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

(1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$

(2) $4x^2+9y^2=36$

초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>a>0)$의 두 초점과 장축은 y축 위에 있다.

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하고, 두 초점 F, F′에서의 거리의 합이 $2b\ (b>c>0)$인 타원의 방정식을 타원의 정의를 이용하여 구하면

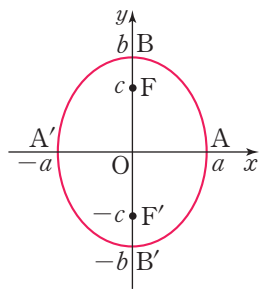
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a^2=b^2-c^2)$$

이다.

이때 $c=\sqrt{b^2-a^2}$이므로 두 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

이고, 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.

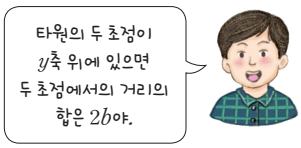


이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } a^2=b^2-c^2)$$



보기 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F}'(0,\ -4)$에서의 거리의 합이 10인 타원의 방정식은 $2b=10$에서 $b=5$이고, $c=4$에서 $a^2=b^2-c^2=5^2-4^2=9$이므로 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$이다.

문제 4 다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 2)$, $\mathrm{F}'(0,\ -2)$에서의 거리의 합이 6인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$에서의 거리의 합이 16인 타원

문제 5 다음 타원의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ (2) $36x^2+11y^2=396$

평행이동한 타원의 방정식은 어떻게 구할까?

타원의 평행이동

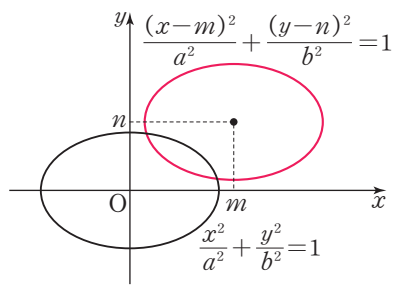


독일의 수학자이자 천문학자인 케플러(Kepler, J., 1571~1630)는 태양을 초점으로 하는 행성 운동의 타원 궤도를 확립했다.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다.



이때 이 타원의

중심의 좌표는 $(m,\ n)$,

초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}+m,\ n)$

이고, 장축과 단축의 길이는 변하지 않는다.

예제 2 타원의 평행이동 이해하기

타원 $x^2-4x+2y^2+4y+2=0$의 중심과 초점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

단계❶ 주어진 식을 변형하여 평행이동 이해하기

주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

이고, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

단계❷ 타원의 중심과 초점의 좌표를 구하고, 그래프 그리기

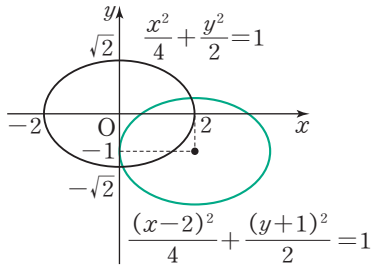
타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$이다.

따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$,

초점의 좌표는 $(\sqrt{2}+2, -1)$, $(-\sqrt{2}+2, -1)$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

문제 6 **다음 타원의 중심과 초점의 좌표를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

(1) $x^2+6x+3y^2-6y+6=0$ (2) $4x^2-8x+5y^2-16=0$

과학 속 수학 여행

1543년 폴란드의 천문학자 코페르니쿠스(Copernicus, N., 1473~1543)가 지구가 자전하면서 태양의 주위를 돈다는 지동설을 발표하였다. 이는 우주의 중심은 지구이고, 모든 천체는 지구의 주위를 돈다는 천동설이 지배하던 시대에 획기적인 발견이었다. 그러나 지동설은 행성들이 태양을 중심으로 원형 궤도를 따라 공전한다고 생각하였기 때문에 관측 결과와 꼭 들어맞지는 않았다.

독일의 수학자이자 천문학자인 케플러(Kepler, J., 1571~1630)는 덴마크의 관측 천문학자인 브라헤 튀코(Brahe, Tycho, 1546~1601)가 남긴 방대한 관측 자료를 수학적으로 분석하였고, 행성들이 태양을 한 초점으로 하는 타원 모양의 궤도를 따라 공전한다는 것과 공전 주기의 제곱은 행성의 타원 궤도의 장축의 길이의 세제곱에 비례한다는 사실을 발견하였다.

공전 주기: 한 천체가 다른 천체의 둘레를 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간

출처: 모리스 클라인, 『지식의 추구와 수학』, 김경화, 이혜숙 역, 이화여자대학교출판부, 1998, 85~108쪽

스스로 확인하기

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에서 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{\square}, \square)$, $(-\sqrt{\square}, \square)$, 장축의 길이는 □, 단축의 길이는 □(이)다.

(2) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$에서 두 초점의 좌표는 $(\square, \sqrt{\square})$, $(\square, -\sqrt{\square})$, 장축의 길이는 □, 단축의 길이는 □(이)다.

02

다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$에서의 거리의 합이 10인 타원

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, \sqrt{17})$, $\mathrm{F}'(0, -\sqrt{17})$에서의 거리의 합이 18인 타원

03

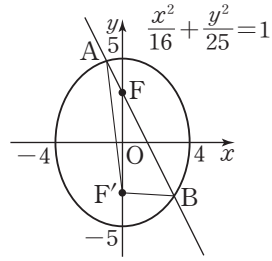
다음 타원의 중심과 초점의 좌표를 구하시오.

(1) $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$

(2) $12x^2+8y^2-24x-84=0$

04

오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 초점 F를 지나고 초점 F′은 지나지 않는 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. 이때 삼각형 AF′B의 둘레의 길이를 구하시오.



05 생각을 키우는 문제



오른쪽 그림과 같이 태양을 한 초점으로 하여 타원 궤도를 그리며 도는 혜성이 있다. 타원 궤도에서 태양으로부터 가장 먼 지점을 원일점, 가장 가까운 지점을 근일점이라고 하면 원일점과 근일점은 타원 궤도의 장축의 양 끝 점이 된다. 태양과 근일점 사이의 거리가 1.13 AU, 태양과 원일점 사이의 거리가 1.78 AU라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 1 AU는 태양과 지구 사이의 평균 거리이고, 태양과 혜성의 크기는 무시한다.)

(1) 이 혜성이 그리는 타원 궤도의 장축의 길이를 구하시오.

(2) 이 혜성이 그리는 타원 궤도의 중심에서 태양까지의 거리를 구하시오.

(3) 이 혜성이 그리는 타원 궤도의 단축의 길이를 구하시오. (단, 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구한다.)

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

타원의 뜻을 알고, 타원을 방정식으로 표현할 수 있다.	😀 🙂 😐

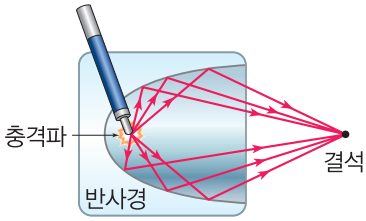
수학으로 꿈꾸는 미래

의료 기기 개발 전문가

진로

과거에는 신장 결석을 제거하려면 절개 수술을 해야 했다. 그러나 체외 충격파 쇄석기라는 의료 기기가 개발된 이후에는 수술 없이 치료를 받을 수 있게 되었다.

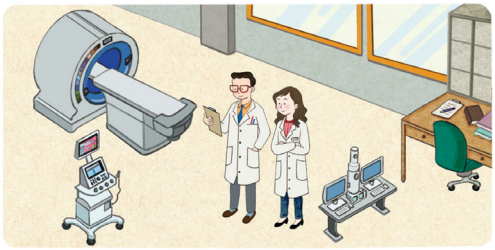
체외 충격파 쇄석기는 타원의 장축을 축으로 회전하여 만든 타원면의 한 초점에서 나간 충격파가 타원면에서 반사되어 타원의 다른 초점으로 모이는 원리를 이용한다. 체외 충격파 쇄석기 안에는 타원 모양의 튜브가 있는데, 이 타원의 한 초점에서 충격파를 발생시키고, 다른 초점에 신장 결석을 위치시켜 충격파가 이 초점으로 모여 신장 결석을 깨뜨리는 것이다.



의료 기기를 설계하고 개발하는 의료 기기 개발 전문가

의료 기기 개발 전문가는 어떤 일을 하나요?

의료 기기 개발 전문가는 최신 과학 기술을 접목한 의료 기기 개발 계획을 수립하고, 환자 모니터, 초음파 기기, X선 촬영(X-ray), 자기 공명 영상(MRI) 등의 의료 기기를 설계하고 개발합니다. 또, 이를 위한 연구를 관리하고, 개발된 의료 기기를 검사하고 점검합니다. 의료 기기 개발 전문가의 세부 직업으로 초음파 의료 기기 개발자, 뇌파기 개발자, 마취기 개발자, 투석기 개발자 등이 있고 주로 전자 산업 분야에서 활동하며, 생명 과학, 정보 통신, 건강 관리 등의 분야에서도 활동하고 있습니다.



의료 기기 개발 전문가가 되기 위해서는 어떤 능력이 필요할까요?

의료 기기 개발 전문가는 전자 기기의 논리적인 구조를 이해해야 하므로 수학적 지식과 논리적으로 사고하는 능력이 필요합니다. 또, 의료 기기 개발을 위한 목표를 세우고 그에 따른 전략을 수립하고 실행하기 위한 자기 성찰 능력이 있어야 합니다. 의료 기기를 기획하고 개발할 때에는 새로운 과학 기술과 의료 분야를 융합하여 창의적으로 생각하는 능력도 필요합니다.

출처: 『과학동아』, 동아사이언스, 2002. 3., 120~121쪽
『제4차 산업혁명시대 미래직업가이드북』, 한국직업능력개발원, 2018, 212~215쪽
커리어넷(https://www.career.go.kr)

03 쌍곡선

성취기준 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선을 방정식으로 표현할 수 있다.

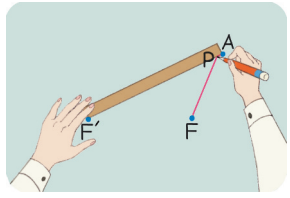
쌍곡선은 무엇일까?

생각 열기

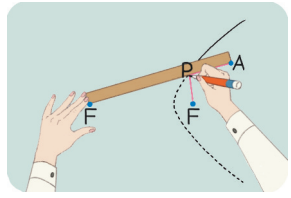
준비물
종이, 자, 실, 연필, 압정

다음 순서에 따라 곡선을 그리고 연필 끝을 점 P라고 할 때, $\overline{PF'}-\overline{PF}$의 값이 변하는지 설명해 보자.

❶ 종이에 두 점 F, F′을 찍은 후, 자의 한 끝을 점 F′에 고정하여 자를 회전할 수 있게 하고, 자의 길이에서 선분 FF′의 길이를 뺀 값보다 긴 실의 양 끝을 자의 다른 한 끝 점 A와 점 F에 고정한다.



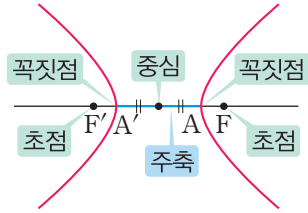
❷ 연필 끝으로 실을 팽팽하게 당기면서 움직여 곡선을 그린다. 이때 자에 연필 끝이 붙어 있게 한다.



쌍곡선 위의 **생각 열기**에서 $\overline{PF'}-\overline{PF}$=(자의 길이)−(실의 길이)는 일정하다.

쌍곡선은 영어로 'hyperbola'라고 한다.

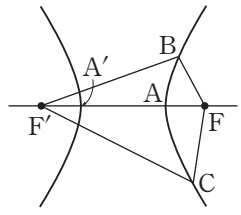
일반적으로 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 **쌍곡선**이라고 하며, 두 점 F, F′을 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.



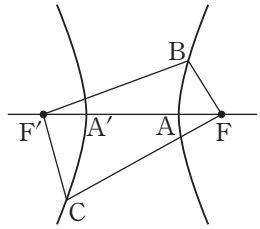
쌍곡선의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라고 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 **주축**, 선분 AA′의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.



보기 오른쪽 그림은 주축이 선분 AA′이고 두 초점이 F, F′인 쌍곡선이다. 쌍곡선 위의 두 점 B, C에 대하여 $\overline{BF'}-\overline{BF}=4$일 때, $\overline{CF'}-\overline{CF}=\overline{BF'}-\overline{BF}=4$이다.



문제 1 오른쪽 그림은 주축이 선분 AA'이고 두 초점이 F, F′인 쌍곡선이다. 쌍곡선 위의 두 점 B, C에 대하여 $\overline{BF'}-\overline{BF}=4$이고 $\overline{CF'}+\overline{CF}=12$일 때, 선분 CF의 길이를 구하시오. (단, $\overline{CF}>\overline{CF'}$)



쌍곡선의 방정식은 어떻게 구할까?

초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

좌표평면에서 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$을 초점으로 하고 두 초점 F, F′에서의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2a$이므로

$\overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다. 이때 $c>a>0$이므로 $c^2-a^2=b^2$으로 놓고 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=c^2-a^2) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점과 주축은 x축 위에 있다.

역으로 점 $P(x, y)$가 방정식 ①을 만족시키면 $|\overline{PF'}-\overline{PF}|=2a$이므로 점 P는 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

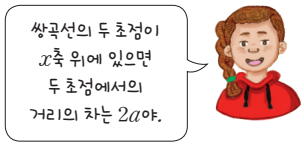
이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$에서의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{단, } b^2=c^2-a^2)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이다.



보기 두 초점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$에서의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식은 $2a=6$이므로 $a=3$이고, $c=5$에서 $b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=16$이므로 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$이다.

문제 2 **다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.**

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$에서의 거리의 차가 4인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(12,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-12,\ 0)$에서의 거리의 차가 20인 쌍곡선



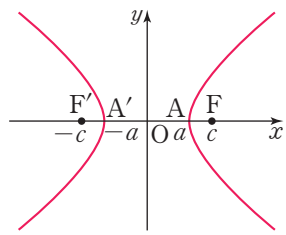
오른쪽 그림과 같은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0)$에서 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라고 하면 $b^2=c^2-a^2$에서 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이므로 두 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

이다. 또, 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표는

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.



예제 1 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선의 방정식 이해하기

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

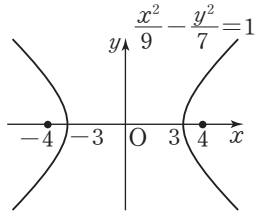
$a=3$, $b=\sqrt{7}$이므로 $c=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$

따라서 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$,

꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$,

주축의 길이는 $2a=6$

이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 3 **다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

(1) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$ (2) $4x^2-y^2=4$

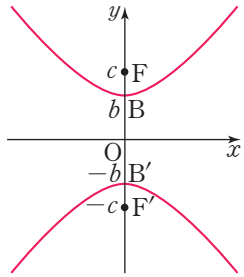
초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 두 초점과 주축은 y축 위에 있다.

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하고, 두 초점 F, F′에서의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 쌍곡선의 정의를 이용하여 구하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (a^2=c^2-b^2)$$

이다.



이때 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이므로 두 초점의 좌표는

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

이다. 또, 쌍곡선의 꼭짓점은

$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0,\ -b)$$

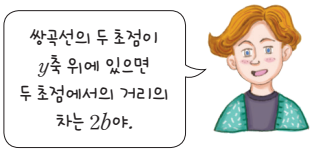
이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$에서의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ (\text{단, } a^2=c^2-b^2)$$



보기 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$에서의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식은 $2b=6$에서 $b=3$이고, $c=5$에서 $a^2=c^2-b^2=5^2-3^2=16$이므로 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$이다.

문제 4 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$에서의 거리의 차가 4인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$에서의 거리의 차가 10인 쌍곡선

문제 5 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=-1$

(2) $9x^2-7y^2=-63$

쌍곡선의 점근선은 무엇일까?

쌍곡선의 점근선

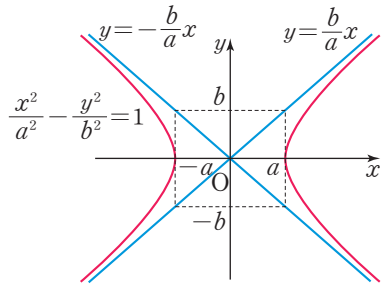
쌍곡선의 방정식

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

이다. 이 식에서 x의 절댓값이 한없이 커질 때 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선 ①은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선 ①의 **점근선**이라고 한다.



배운 내용 떠올리기

곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

마찬가지로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식도 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

예제 2 쌍곡선의 점근선의 방정식 구하기

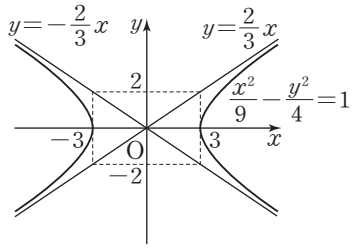
쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$의 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$이므로 $a=3$, $b=2$

따라서 점근선의 방정식은 $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$

이때 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표가 $(3, 0)$, $(-3, 0)$이므로 주어진 쌍곡선의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

문제 6 **다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.**

(1) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{20}=1$ (2) $x^2-4y^2=-4$

문제 7 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$이고, 주축의 길이가 $2\sqrt{3}$인 쌍곡선의 방정식을 구하시오. (단, 쌍곡선의 초점은 y축 위에 있다.)

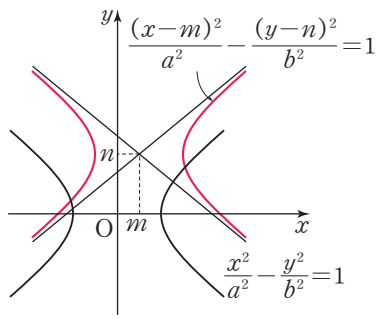
평행이동한 쌍곡선의 방정식은 어떻게 구할까?

쌍곡선의 평행이동

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다.



이때 이 쌍곡선의

중심의 좌표는 (m, n),

초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}+m, n)$,

꼭짓점의 좌표는 $(a+m, n)$, $(-a+m, n)$

점근선의 방정식은 $y-n=\pm\frac{b}{a}(x-m)$

이고, 주축의 길이는 변하지 않는다.

예제 3 쌍곡선의 평행이동 이해하기

쌍곡선 $x^2-3y^2-2x-2=0$의 중심과 초점, 꼭짓점의 좌표, 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

풀이

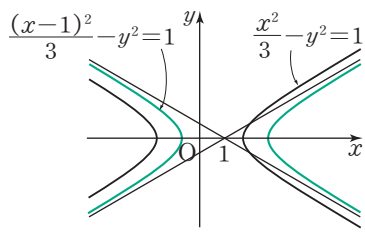
단계❶ 주어진 식을 변형하여 평행이동 이해하기

주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면 $\frac{(x-1)^2}{3}-y^2=1$이고, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

단계❷ 쌍곡선의 중심과 초점, 꼭짓점의 좌표, 점근선의 방정식을 구하고, 그래프 그리기

쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(1, 0)$,
초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-1, 0)$,
꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{3}+1, 0)$, $(-\sqrt{3}+1, 0)$,
점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$
이고, 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

문제 8 다음 쌍곡선의 중심과 초점, 꼭짓점의 좌표, 점근선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) $x^2-y^2-2y=0$ (2) $3x^2-2y^2-12x-6=0$

이차곡선은 무엇일까?

이차곡선

일반적으로 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

의 그래프는 특수한 경우를 제외하면 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 중 하나로 나타나며 이들을 통틀어 **이차곡선**이라고 한다.

Q x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어지는 도형 중 이차곡선이 아닌 것도 있나요?

A 네, 있습니다. 먼저 $x^2-y^2=0$, 즉 $(x+y)(x-y)=0$과 같이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 곡선이 아니라 두 직선 $x+y=0$, $x-y=0$을 나타냅니다. 또, $x^2+y^2=0$의 경우는 점 $(0, 0)$을 나타내고, $x^2+y^2=-1$은 그래프로 나타낼 수 없습니다.

원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y의 이차방정식으로 나타낼 수 있다. 예를 들면

$$\text{원:}\quad x^2+(y-2)^2=4 \iff x^2+y^2-4y=0$$

$$\text{포물선:}\quad y^2=-4(x-1) \iff y^2+4x-4=0$$

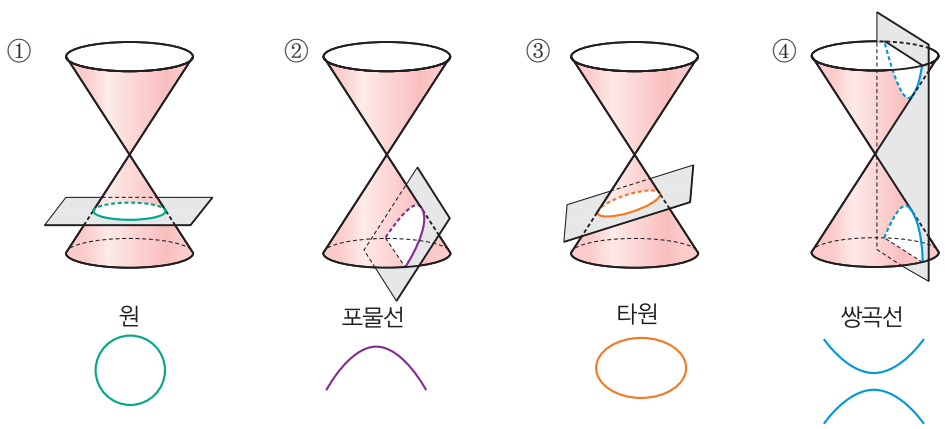
$$\text{타원:}\quad \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \iff 9x^2+4y^2+36x=0$$

$$\text{쌍곡선:}\quad x^2-\frac{y^2}{4}=-1 \iff 4x^2-y^2+4=0$$

이다. 따라서 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 방정식은 모두 x, y의 이차방정식으로 나타낼 수 있으므로 이차곡선이다.

이차곡선은 공간에서 모선이 일치하는 두 원뿔을 원뿔의 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 잘랐을 때 단면에 나타나는 곡선이기도 하며, 그런 의미에서 이차곡선을 원뿔곡선이라고도 한다.

다음 그림과 같이 자르는 평면이 밑면과 평행할 때(①), 자르는 평면이 모선과 평행할 때(②), 자르는 평면이 밑면과 이루는 각이 모선과 밑면이 이루는 각보다 작을 때(③), 자르는 평면이 밑면과 수직일 때(④) 각각 원, 포물선, 타원, 쌍곡선이 만들어진다.



예제 4 방정식이 나타내는 도형 구하기

방정식 $x^2-2x-4y-7=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

풀이

주어진 방정식을 변형하면

$$(x-1)^2=4(y+2)$$

따라서 이 방정식은 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.

답 포물선

문제 9 다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

(1) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$

(2) $4x^2-y^2+8x+2y-5=0$

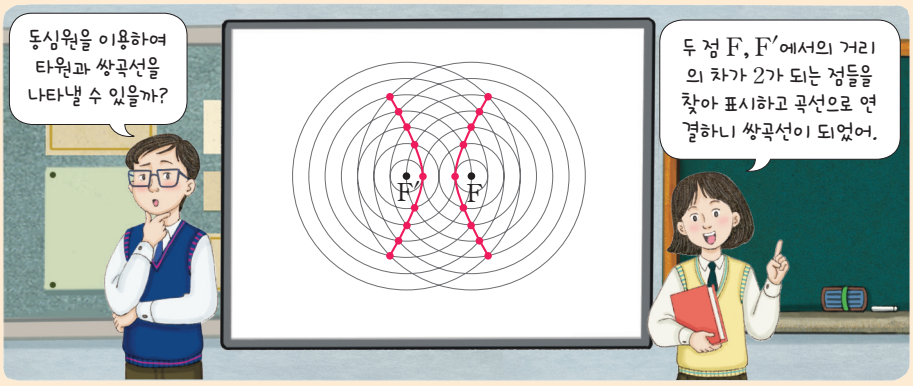
(3) $y^2-4x+10y+25=0$

(4) $x^2+2y^2+2x+4y-1=0$

생각 넓히기

추론 의사소통

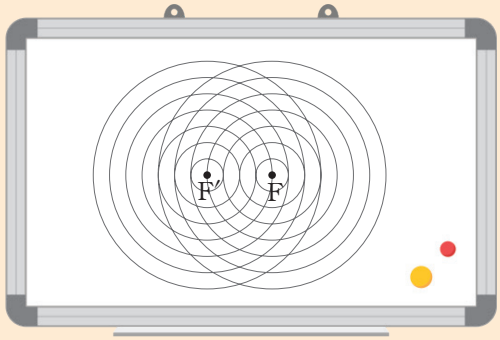
다음은 중심이 각각 F, F′이고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, …, 7인 동심원에 대하여 두 학생이 나눈 대화이다.



은우 서아

1 서아가 그린 곡선이 쌍곡선 모양이라고 생각한 이유를 말해 보자.

2 오른쪽 그림은 중심이 각각 F, F′이고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, …, 7인 동심원이다. 오른쪽 그림에 타원 모양을 그리고, 타원 모양이 되는 이유를 친구들과 이야기해 보자.



스스로 확인하기

03. 쌍곡선
정답 및 해설 177쪽

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$이고, 주축의 길이는 □(이)다.

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 □, $y=-\frac{b}{a}x$이다.

(3) 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

의 그래프는 특수한 경우를 제외하면 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 중 하나로 나타나며 이들을 통틀어 □(이)라고 한다.

02

다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(6, 0)$, $\mathrm{F}'(-6, 0)$에서의 거리의 차가 2인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, 5)$, $\mathrm{F}'(0, -5)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선

03

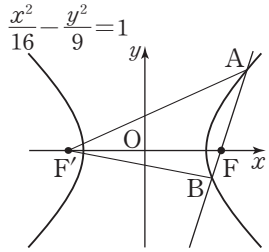
다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이, 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $3x^2-y^2=3$

(2) $2x^2-3y^2-6y=-15$

04

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 초점 F를 지나고 초점 F′은 지나지 않는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=10$일 때, 삼각형 AF′B의 둘레의 길이를 구하시오.

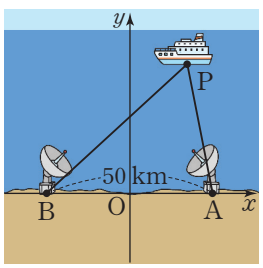


05

점근선의 방정식이 $y=\sqrt{3}(x-1)$, $y=-\sqrt{3}(x-1)$이고, 두 꼭짓점이 $(0, 0)$, $(2, 0)$인 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

06 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림과 같이 50 km 떨어진 두 기지국 A, B에서 이동 중인 배 P에 전파를 보내 거리를 계산하였더니 배와 두 기지국 사이의 거리의 차가 항상 30 km로 일정했다고 한다. 두 기지국을 연결한 직선을 x축, 두 기지국 A, B의 중간 지점을 원점 O로 하는 좌표축을 그렸더니 점 P의 x좌표가 25이었다. 점 P의 y좌표를 구하시오. (단, 점 P의 y좌표는 양수이다.)





나의 학습을 스스로 점검해 보자.

쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선을 방정식으로 표현할 수 있다.	☺ ☺ ☺

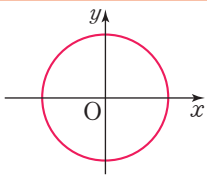
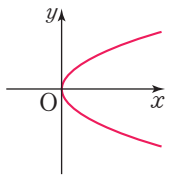
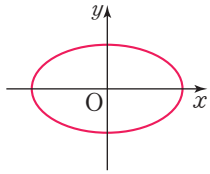
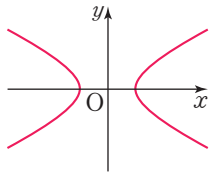
탐구하는 수학

방정식의 이차항의 계수에 따른 이차곡선의 그래프 확인하기

추론 정보처리

학습 목표 공학 도구를 이용하여 이차곡선의 그래프와 방정식 사이의 관계를 이해할 수 있다.

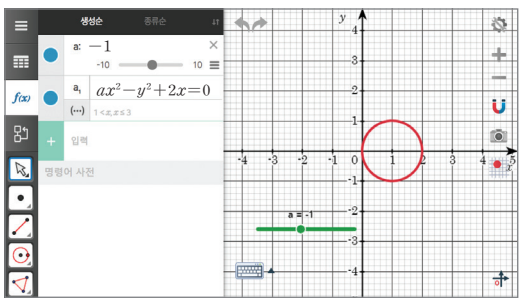
x, y에 대한 이차방정식 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$이 이차곡선을 나타낼 때, 이차항의 계수 사이의 관계를 다음 표와 같이 나타낼 수 있다.

이차곡선	원	포물선	타원	쌍곡선
계수 사이의 관계	$a=b$ $(a\neq0,\ b\neq0)$	$a=0,\ b\neq0$ 또는 $a\neq0,\ b=0$	$ab>0,\ a\neq b$	$ab<0$
예	$x^2+y^2=4$	$y^2-4x=0$	$x^2+4y^2-4=0$	$x^2-4y^2-4=0$
그래프의 개형				

공학 도구를 이용하여 방정식 $ax^2-y^2+2x=0$이 나타내는 도형에 대해서 알아보자.

❶ 'ax^2-y^2+2x=0'을 입력하면 a에 대한 슬라이더가 나타난다.

❷ 슬라이더를 $a=-1$로 움직였을 때 나타나는 이차곡선이 원임을 확인한다.



활동 1 **방정식 $ax^2-y^2+2x=0$에서 a의 값의 범위가 다음과 같을 때 어떤 이차곡선이 그려지는지 추측해 보고, 슬라이더를 움직여 각각의 범위에서 나타나는 이차곡선을 확인해 보자.**

(1) $a<-1$

(2) $-1<a<0$

(3) $a=0$

(4) $a>0$



04 이차곡선의 접선

성취기준 이차곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.



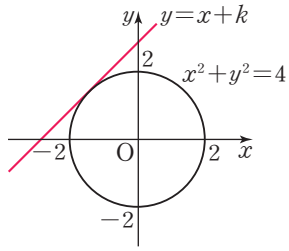
포물선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

생각 열기

원의 방정식 $x^2+y^2=4$와 직선의 방정식 $y=x+k$에서 y를 소거하여 이차방정식 $2x^2+2kx+k^2-4=0$을 얻었다.

❶ 주어진 이차방정식의 판별식 D를 구해 보자.

❷ ❶의 결과를 이용하여 주어진 원과 직선이 접하도록 하는 양수 k의 값을 구해 보자.



기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

위의 **생각 열기**와 같이 이차방정식의 판별식을 이용하여 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 접선의 방정식을 구해 보자.

직선 $y=mx+n$에서 $m=0$이면 포물선과 직선이 항상 한 점에서 만나지만 이 직선은 접선이 아니다.

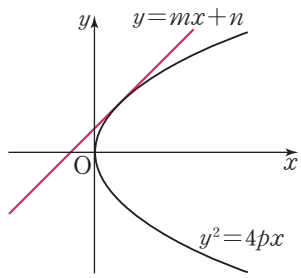
기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$ $(m\neq0)$이라 하고 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 $y=mx+n$을 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4(mn-2p)^2-4m^2n^2=16p(p-mn)=0$$

이다. 이때 $p\neq0$이므로 $p-mn=0$, 즉 $n=\frac{p}{m}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}\ (m\neq0)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기울기가 주어진 포물선의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}\ (\text{단, } m\neq0)$$

보기 포물선 $y^2=4x$에 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y^2=4x=4\times1\times x$에서 $p=1$, $m=1$이므로 $y=x+1$이다.

문제 1 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 포물선 $y^2=8x$에 접하고, 기울기가 2인 직선

(2) 포물선 $y^2=-2x$에 접하고, $x+y-5=0$에 평행한 직선

문제 2 **직선 $y=mx-2$가 포물선 $y^2=-4x$와 접할 때, 실수 m의 값을 구하시오.**

포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

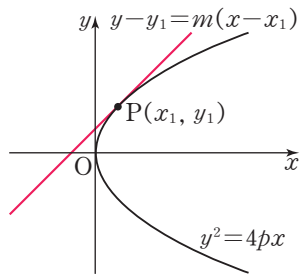
포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

(i) $x_1\neq0$일 때

접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \quad \cdots\cdots ①$$



이다. ①을 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(my_1-m^2x_1-2p)x+(y_1-mx_1)^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$에서

$$x_1m^2-y_1m+p=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 포물선 위의 점이므로 ${y_1}^2=4px_1$이고, 이 식을 변형하여 ②에 대입하면

$$m^2\times\frac{{y_1}^2}{4p}-my_1+p=0$$

$$m^2{y_1}^2-4pmy_1+4p^2=0$$

$$(my_1-2p)^2=0$$

이다. 따라서 $m=\frac{2p}{y_1}$이다.

이 m의 값을 ①에 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x-x_1)+{y_1}^2$$

이고, ${y_1}^2=4px_1$이므로

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이다.

(ii) $x_1=0$일 때

$y_1=0$이므로 접선의 방정식은 $x=0$이고, 이 경우에도 $y_1y=2p(x+x_1)$이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$

보기 포물선 $y^2=x$ 위의 점 $(4, 2)$에서의 접선의 방정식은 $y^2=x=4\times\frac{1}{4}\times x$에서 $p=\frac{1}{4}$이므로 $2\times y=2\times\frac{1}{4}\times(x+4)$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+1$이다.

문제 3 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2=-2x$ 위의 점 $(-2, -2)$에서의 접선

(2) 포물선 $x^2=y$ 위의 점 $(-4, 16)$에서의 접선

예제 1 포물선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 구하기

점 $(-4, 1)$에서 포물선 $y^2=2x$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.

풀이

접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=x+x_1$$

이 직선이 점 $(-4, 1)$을 지나므로

$$y_1\times1=(-4)+x_1$$

$$y_1=x_1-4 \quad \cdots\cdots ①$$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 포물선 $y^2=2x$ 위의 점이므로

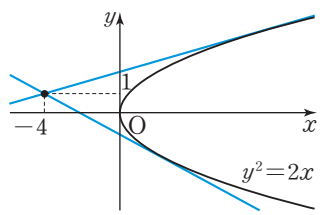
$${y_1}^2=2x_1 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=2,\ y_1=-2 \text{ 또는 } x_1=8,\ y_1=4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x-1 \text{ 또는 } y=\frac{1}{4}x+2$$



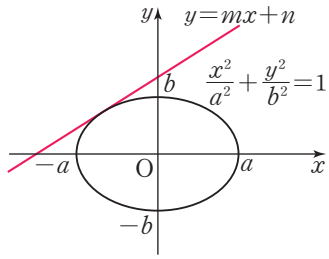
답 $y=-\frac{1}{2}x-1$ 또는 $y=\frac{1}{4}x+2$

문제 4 점 $(2, 1)$에서 포물선 $y^2=-4x$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.

타원의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해 보자.



기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 $y=mx+n$을 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^4m^2n^2-4a^2(a^2m^2+b^2)(n^2-b^2)$$
$$=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

이므로 $n^2=a^2m^2+b^2$, 즉

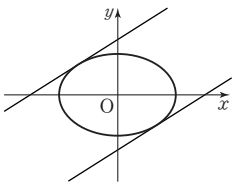
$$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이다.

한 타원에 대하여 기울기가 같은 접선은 2개이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

보기 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$에 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식은

$m=1$, $a^2=9$, $b^2=7$이므로 $y=x\pm\sqrt{9\times1^2+7}=x\pm4$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+4$ 또는 $y=x-4$이다.

문제 5 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 타원 $2x^2+y^2=2$에 접하고, 기울기가 2인 직선

(2) 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$에 접하고, 직선 $2x+y+1=0$에 평행한 직선

문제 6 직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$에 접할 때, 양수 k의 값을 구하시오.

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

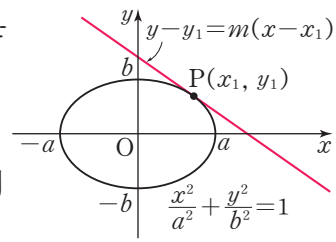
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

(i) $y_1\neq 0$일 때

접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \quad \cdots\cdots ①$$



이다. ①을 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(y_1-mx_1)x+a^2(y_1-mx_1)^2-a^2b^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$에서

$$(a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m+(b^2-y_1^2)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서
$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$이므로
$a^2-x_1^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}$,
$b^2-y_1^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}$

이때 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$이고, 이 식을 변형하여 ②에 대입하면

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2+2x_1y_1m+\frac{b^2x_1^2}{a^2}=0$$

$$\left(\frac{ay_1}{b}m+\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

이므로 $m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이다.

이 m의 값을 ①에 대입한 후 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$을 이용하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다.

(ii) $y_1=0$일 때

$x_1=\pm a$이므로 접선의 방정식은 $x=\pm a$이고, 이 경우에도 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

보기 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{-3y}{12}=1$에서 $y=x-4$이다.

문제 7 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$ 위의 점 $(-1, 4)$에서의 접선

(2) 타원 $3x^2+6y^2=18$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선

예제 2 타원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 구하기

점 $(0, -3)$에서 타원 $x^2+2y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.

풀이

접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+2y_1y=2$$

이 직선이 점 $(0, -3)$을 지나므로

$$x_1\times 0+2\times y_1\times(-3)=2$$

$$y_1=-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 타원 $x^2+2y^2=2$ 위의 점이므로

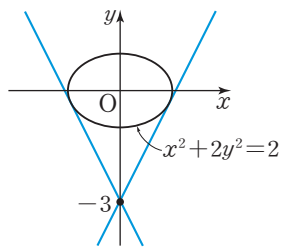
$${x_1}^2+2{y_1}^2=2 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=\frac{4}{3},\ y_1=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x_1=-\frac{4}{3},\ y_1=-\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-3 \text{ 또는 } y=-2x-3$$



답 $y=2x-3$ 또는 $y=-2x-3$

문제 8 점 $(2, 3)$에서 타원 $x^2+4y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.

쌍곡선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해 보자.

기울기가 m인 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 $y=mx+n$을 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$$

이다. $a^2m^2-b^2>0$일 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=4a^4m^2n^2-4a^2(a^2m^2-b^2)(n^2+b^2)$$
$$=4a^2b^2(b^2-a^2m^2+n^2)=0$$

이므로 $n^2=a^2m^2-b^2$, 즉

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (a^2m^2-b^2>0)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기울기가 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$에 접하고, 기울기가 1인 직선의 방정식은

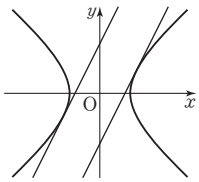
$m=1$, $a^2=9$, $b^2=4$이므로 $y=x\pm\sqrt{9\times1^2-4}=x\pm\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+\sqrt{5}$ 또는 $y=x-\sqrt{5}$이다.

Q 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 기울기가 m인 접선은 항상 존재하나요?

A $a^2m^2-b^2\le0$일 때에는 존재하지 않아요. 예를 들어 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에서 기울기가 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$인 접선은 존재하지 않아요. 특히, 기울기가 $\frac{1}{2}$인 경우는 점근선과 평행하거나 일치하므로 접선이 될 수 없습니다.

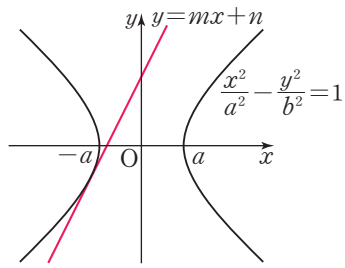
한 쌍곡선에 대하여 기울기가 같은 접선은 2개이다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

(단, $b^2-a^2m^2>0$)



문제 9 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$에 접하고, 기울기가 2인 직선

(2) 쌍곡선 $x^2-3y^2=6$에 접하고, 직선 $3x+y+1=0$에 평행한 직선

문제 10 직선 $y=mx+3$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$에 접할 때, 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오.

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

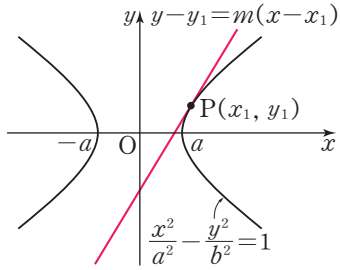
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

(i) $y_1 \neq 0$일 때

접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \quad \cdots\cdots ①$$



이다. ①을 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2m(y_1-mx_1)x+a^2(y_1-mx_1)^2+a^2b^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $D=0$에서

$$(a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m-(b^2+y_1^2)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$이고, 이 식을 변형하여 ②에 대입하면

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서
$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$이므로
$a^2-x_1^2=-\frac{a^2y_1^2}{b^2}$,
$b^2+y_1^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}$

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2-2x_1y_1m+\frac{b^2x_1^2}{a^2}=0$$

$$\left(\frac{ay_1}{b}m-\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

이므로 $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이다. 이 m의 값을 ①에 대입한 후 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$을 이용하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

이다.

(ii) $y_1=0$일 때

$x_1=\pm a$이므로 접선의 방정식은 $x=\pm a$이고, 이 경우에도 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{2x}{2}-y=1$에서 $y=x-1$이다.

문제 11 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선 $3x^2-y^2=3$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=-1$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선

예제 3 쌍곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식 구하기

점 $(-1, 0)$에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.

풀이

접점을 $P(x_1, y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3}-\frac{y_1y}{2}=1$$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

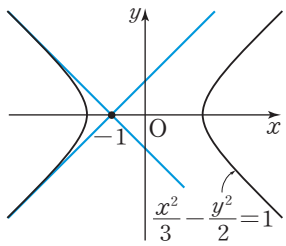
$$\frac{x_1\times(-1)}{3}-\frac{y_1\times 0}{2}=1,\ x_1=-3 \quad \cdots\cdots ①$$

또, 점 $P(x_1, y_1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3}-\frac{y_1^2}{2}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x_1=-3, y_1=2$ 또는 $x_1=-3, y_1=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=-x-1$ 또는 $y=x+1$



답 $y=-x-1$ 또는 $y=x+1$

문제 12 **점 $(1, 1)$에서 쌍곡선 $2x^2-y^2=-8$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**

생각 넓히기

미적분 Ⅱ를 이수한 학생이 학습할 수 있습니다.

문제해결

미적분 Ⅱ를 학습한 경우 음함수의 미분법을 이용하여 다음과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=5$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 방정식을 구할 수도 있다.

쌍곡선의 방정식 $x^2-y^2=5$에서 양변의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2)-\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(5)$$

에서 $2x-2y\frac{dy}{dx}=0$이고, 접점이 원점이 아니므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$이다.

따라서 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$에서

$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$이다.

타원 $x^2+3y^2=12$ 위의 점 $(3, 1)$에서의 접선의 방정식을 음함수의 미분법을 이용하여 구해 보자.

01 학습 목표 되새기기

다음 표의 빈칸에 알맞은 식을 써넣으시오.

(1)

이차곡선	기울기가 m인 접선의 방정식
포물선 $y^2=4px$	
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

(2)

이차곡선	곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식
포물선 $y^2=4px$	$y_1y=2p(x+x_1)$
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

02

포물선 $y^2=-8x$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -4)$에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.

03

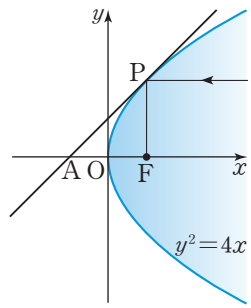
타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 직선 $x+2y+5=0$에 평행한 직선의 방정식을 모두 구하시오.

04

두 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{A}(-4,\ \sqrt{15})$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

05 생각을 키우는 문제

포물선의 축을 회전축으로 하여 회전시켰을 때 만들어지는 포물면 모양의 안테나에서 축과 평행하게 입사한 전파는 포물면에 반사되어 초점을 향하여 가는 성질이 있다. 오른쪽 그림은 단면이 포물선 $y^2=4x$의 일부이고, 포물선의 초점 F의 위치에 전파 수신기가 있는 위성 방송 안테나를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(2) (1)의 접선이 x축과 만나는 점을 A라고 할 때, 삼각형 AFP는 어떤 삼각형인지 구하시오.



나의 학습을 스스로 점검해 보자.

이차곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

탐구 하는 수학

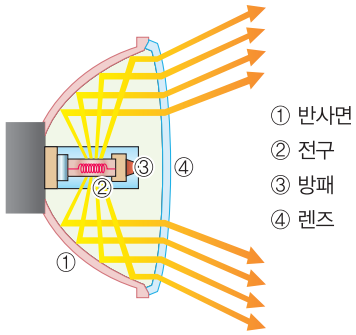
실생활에 활용되는 이차곡선의 성질 알아보기

학습 목표 이차곡선의 광학적 성질의 원리를 이해하고, 실생활에 어떻게 활용되는지 알 수 있다.

1 포물선

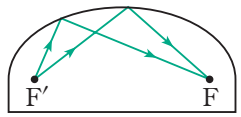
포물선의 축에 평행하게 들어온 빛은 포물선의 초점을 향해 나아가고, 반대로 포물선의 초점에서 나온 빛은 포물선에서 반사되어 포물선의 축에 평행하게 나아간다. 이러한 성질은 포물면에서도 유지되는데, 자동차의 헤드라이트는 포물선의 이러한 원리를 이용하여 제작된 것이다.

전구의 빛을 반사하는 반사면이 포물면으로 된 헤드라이트에서 전구는 포물선의 초점의 위치에 놓여 있는데 전구에서 나온 불빛은 포물면에 부딪혀 평행광선으로 바뀐 후 렌즈를 통과하여 바깥으로 나아가 운전자의 시야를 더욱 밝혀 주게 된다.



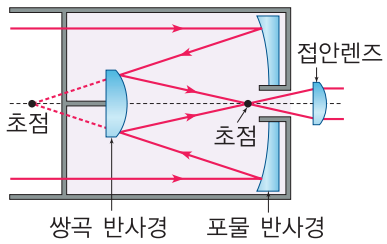
2 타원

타원의 한 초점에서 나간 소리는 타원면에서 반사되어 타원의 다른 초점으로 모이는데, 이 성질은 미국 국회의사당의 '속삭이는 회랑'이라고 불리는 방을 만들 때 사용되었다. 이 방에서는 한 초점에서 속삭이는 소리가 천장에 반사되어 다른 초점에 모이게 되므로 그 초점에 위치하는 사람은 반대편 초점에서 속삭이는 소리를 잘 들을 수 있다.



3 쌍곡선

쌍곡선의 한 초점을 향해 직진하는 빛은 쌍곡면에 부딪히면 다른 초점을 향해 반사되는데, 이 성질은 안테나를 만드는 데 사용된다. 파라볼라 안테나의 포물면이 커지면 전파의 송수신이 원활하지 않은 경우가 있는데 카세그레인(Cassegrain) 안테나는 이러한 문제를 해결하기 위해 두 개의 반사경을 사용하였다. 포물면인 주 반사경의 초점과 쌍곡면인 부 반사경의 한 초점을 일치시키면 전파는 주 반사경인 포물면에서 반사되어 포물선의 초점을 향해 가다가 부 반사경인 쌍곡면에서 반사되어 쌍곡선의 다른 초점으로 모인다.



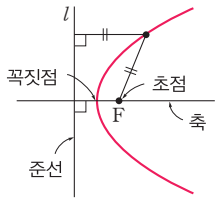
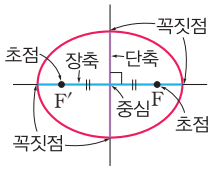
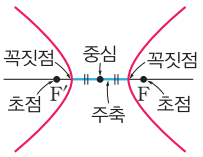
출처: 남호영, 정춘희, 김세식, 원유미, 『원뿔에서 태어난 이차곡선』, 수학사랑, 2012, 164~197쪽

활동 1 **실생활에서 이차곡선의 광학적 성질을 이용한 도구나 시설들을 찾아 친구들과 이야기해 보자.**



배운 내용 정리하기

1 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식

포물선	타원	쌍곡선
평면 위의 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 서로 같은 점들의 집합 	평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 합이 일정한 점들의 집합 	평면 위의 서로 다른 두 점 F, F′에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합 
포물선의 방정식	**타원의 방정식**	**쌍곡선의 방정식**
(1) 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ (단, $p\neq 0$) (2) 초점이 $\mathrm{F}(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$ (단, $p\neq 0$)	(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 합이 $2a$ $(a>c>0)$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b^2=a^2-c^2$) (2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$에서의 거리의 합이 $2b$ $(b>c>0)$인 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a^2=b^2-c^2$)	(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$에서의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b^2=c^2-a^2$) (2) 두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0, -c)$에서의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (단, $a^2=c^2-b^2$)

2 포물선, 타원, 쌍곡선의 접선의 방정식

포물선의 접선의 방정식	타원의 접선의 방정식	쌍곡선의 접선의 방정식
(1) 포물선 $y^2=4px$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ (단, $m\neq 0$) (2) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$	(1) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ (2) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$	(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$) (2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

01 ●○○

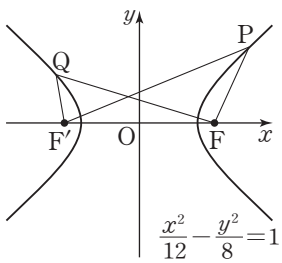
초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$을 지나는 포물선의 준선의 방정식이 $x=k$일 때, k의 값을 모두 구하시오.

02 ●○○

두 초점이 $\mathrm{F}(\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3},\ 0)$이고, 장축과 단축의 길이의 차가 2인 타원의 방정식을 구하시오.

03 ●○○

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라고 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$일 때, $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{QF}'}$의 값은? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)



① $8\sqrt{2}-6$ ② $8\sqrt{3}-6$ ③ $8\sqrt{6}-6$
④ $8\sqrt{2}+6$ ⑤ $8\sqrt{3}+6$

04 ●○○

좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$와 직선 $y=-3$에 이르는 거리가 같은 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 방정식이

$$x^2+ay^2+bx+cy+d=0$$

일 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

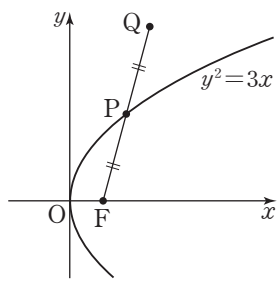
05 ●○○

타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

06 ●●○

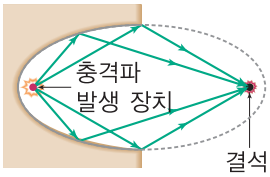
오른쪽 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=3x$ 위에 $\overline{\mathrm{FP}}=2$인 점 P가 있다. 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$가 되도록 제1사분면 위의 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x좌표를 구하시오.



07 ●●○

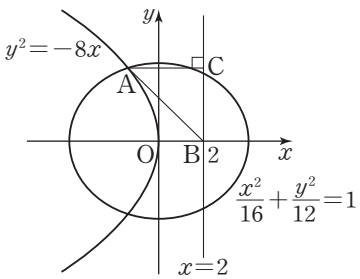
오른쪽 그림과 같이 체외 충격파 쇄석기의 단면은 타원 모양이고, 타원의 한 초점의 위치에 있는 충격파 발생 장치에서 발생한 충격파는 타원면에 반사되어 다른 한 초점의 위치에 있는 결석을 파괴한다. 타원의 장축의 길이가 40 cm, 단축의 길이가 20 cm일 때, 충격파 발생 장치에서 결석까지의 거리를 구하시오.

(단, 충격파 발생 장치와 결석의 크기는 무시한다.)



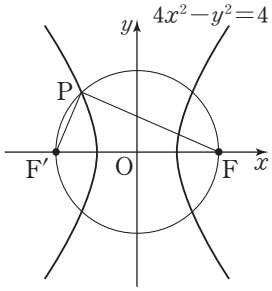
08 ●●○

다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$과 포물선 $y^2=-8x$의 교점 중 제2사분면 위의 점을 A, 직선 $x=2$와 x축의 교점을 B, 점 A에서 직선 $x=2$에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, $\overline{AB}+\overline{AC}$의 값을 구하시오.



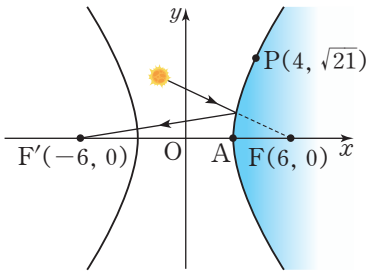
09 ●●○

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 선분 FF′을 지름으로 하는 원과 쌍곡선의 교점 중 제2사분면 위의 점을 P라고 할 때, 선분 PF의 길이를 구하시오.



10 ●●○

다음 그림과 같이 쌍곡면 모양의 거울의 단면에서 쌍곡선의 한 초점 $F(6, 0)$을 향해 입사한 빛이 쌍곡면에 반사되어 쌍곡선의 다른 초점인 $F'(-6, 0)$을 향해 나아간다고 하자. 이 쌍곡선이 점 $P(4, \sqrt{21})$을 지날 때, 꼭짓점 A에서 초점 F′까지의 거리를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)



11 ●●○

포물선 $y^2=-\frac{1}{2}x$ 위의 점 $P(a, b)$와 직선 $y=-x+5$ 사이의 거리가 최소일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

12 ●●○

점 $P(4, 4)$에서 타원 $2x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$라고 할 때, x_1x_2의 값을 구하시오.

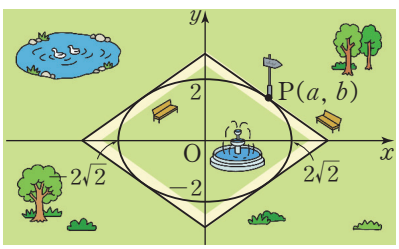
서술형

13 ●●●

쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\angle F'PF$의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라고 하면 $\overline{F'A}:\overline{FA}=5:3$이다. 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.)

14 ●●●

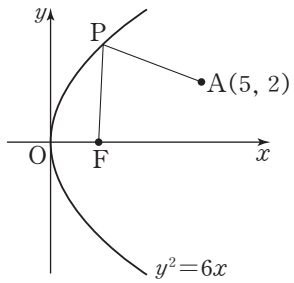
다음 그림과 같이 타원 모양의 공원에 접하는 직선 도로를 만들어 도로와 공원이 접하는 지점에 표지판을 세우려고 한다. 타원의 중심이 원점, 장축이 x축, 단축이 y축 위에 오도록 좌표평면 위에 타원을 놓으면 타원의 꼭짓점은 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(-2\sqrt{2},\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$이다. 공원에 접하는 직선 도로로 둘러싸인 부분은 마름모이고 그 넓이가 $16\sqrt{2}$이다. 표지판을 세울 지점을 $P(a,\ b)$라고 할 때, 양수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, 도로의 폭은 무시한다.)



사고력

15 ●●●

오른쪽 그림과 같이 점 $A(5,\ 2)$에서 포물선 $y^2=6x$ 위의 임의의 점 P를 거쳐 초점 F에 이르는 거리가 최소일 때, 선분 AP의 길이를 구하시오.



16 ●●●

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 교점이 점 $P(3,\ 1)$이고, 점 P에서의 타원과 쌍곡선에 대한 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2b^2의 값을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

이차곡선을 이용하여 문제를 해결함으로써 이차곡선의 유용성을 인식하였다.	
이차곡선을 방정식으로 표현하고 논리적, 체계적으로 생각하려고 하였다.	
이차곡선의 개념과 원리를 이용하여 문제를 해결하기 위해 끈기 있게 도전하였다.	

수학 프로젝트 활동

추론 · 의사소통 · 정보처리

공학 도구를 이용하여 이차곡선 작도하기

학습 목표 공학 도구를 이용하여 이차곡선을 작도할 수 있다.

다음은 공학 도구를 이용하여 초점이 F(1, 0)이고, 준선이 $x=-1$인 포물선을 작도하는 과정이다.

: 대상 위의 점
: 수직이등분선
: 수선
: 교점
: 선택
: 자취

❶ '(1, 0)'과 'x=-1'을 입력하면 점 (1, 0)과 직선 a_1: $x=-1$이 나타난다.
여기서 점 (1, 0)을 누른 후 이름을 F로 입력한다.

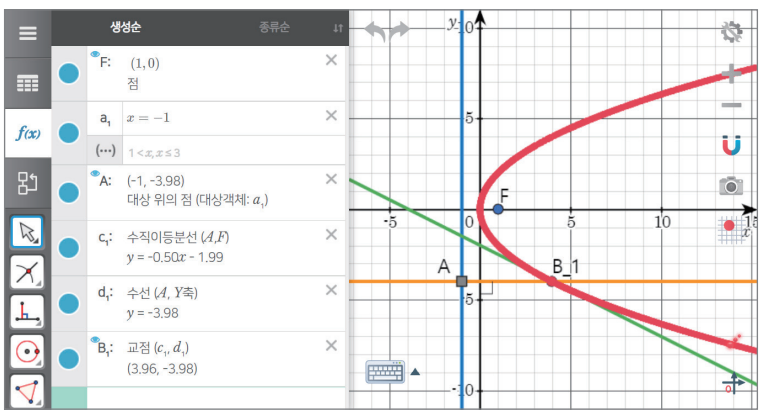
❷ 을 누른 후 준선 a_1을 선택하여 준선 위의 한 점 A를 잡는다.
을 누른 후 두 점 A와 F를 선택하여 선분 AF의 수직이등분선 c_1을 나타낸다.

❸ 을 누른 후 점 A와 y축을 선택하여 점 A를 지나고 직선 a_1에 수직인 직선 d_1을 나타낸다.

❹ 을 누른 후 두 직선 c_1과 d_1을 선택하여 두 직선 c_1과 d_1의 교점 B_1을 나타낸다.

❺ 을 누른 후 점 B_1에서 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 를 누른다.

❻ 점 A를 마우스로 누른 상태에서 위아래로 움직이면 다음 그림과 같은 도형이 그려진다.



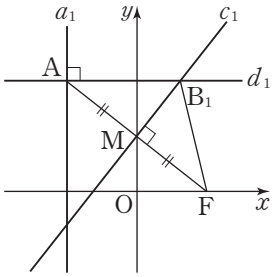
오른쪽 그림에서 선분 AF와 직선 c_1의 교점을 M이라고 하면 직선 c_1은 선분 AF의 수직이등분선이므로

$$\overline{AM}=\overline{FM},\ \angle AMB_1=\angle FMB_1=90^\circ$$

이다. 두 삼각형 AB_1M과 FB_1M에서

$$\overline{AM}=\overline{FM},\ \overline{B_1M}\text{은 공통},\ \angle AMB_1=\angle FMB_1$$

이므로 $\triangle AB_1M\equiv\triangle FB_1M$이다. 즉, $\overline{B_1A}=\overline{B_1F}$이다.



따라서 점 B_1에서 직선 a_1까지 거리와 점 B_1에서 점 F까지 거리가 항상 일정하므로 점 B_1이 그리는 도형은 포물선임을 알 수 있다.

활동 1 **공학 도구를 이용하여 초점이 A(4, 0), B(−4, 0)이고 장축의 길이가 10인 타원을 작도해 보자.**

: 원: 중심과 반지름
: 대상 위의 점
: 선분
: 수직이등분선
: 교점
: 선택
: 자취

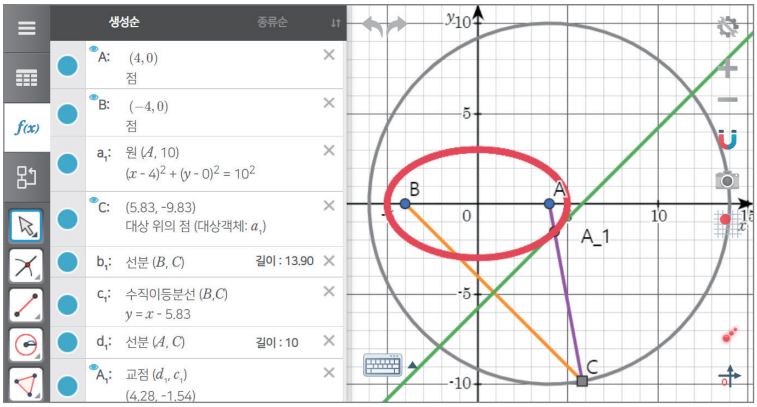
❶ '(4, 0)'과 '(−4, 0)'을 입력하여 두 초점 A(4, 0), B(−4, 0)을 나타내고, 을 이용하여 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원을 나타낸다.

❷ 을 누른 후 원을 선택하여 원 위의 한 점 C를 잡는다. 또, 을 누른 후 두 점 B, C를 선택하여 선분 BC를 나타내고, 을 누른 후 선분 BC의 수직이등분선 c_1을 나타낸다.

❸ 을 누른 후 선분 AC를 나타내고, 을 누른 후 선분 AC와 직선 c_1을 선택하여 교점 A_1을 나타낸다.

❹ 을 누른 후 점 A_1에서 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하고 를 누른다.

❺ 점 C를 마우스로 누른 상태에서 원 위를 움직이면 다음 그림과 같은 도형이 그려진다.



(1) 위에서 작도한 도형이 타원이 되는 이유를 설명해 보자.

(2) A(3, 0), B(−3, 0)을 잡고, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 12인 원을 나타내고, ❷~❺의 과정을 실행할 때 점 A_1이 그리는 도형의 방정식을 구해 보자.

나의 학습을 스스로 점검해 보고, 프로젝트 활동을 통해 느낀 점을 적어 보자.

평가 항목	자기 평가
이차곡선을 작도하는 과정에서 논리적으로 사고하는 태도를 갖게 되었다.	
공학 도구를 이용하여 이차곡선을 작도하면서 논리적 근거를 바탕으로 원리를 설명하였다.	

프로젝트 활동을 하면서 좋았던 점	프로젝트 활동을 하면서 배운 점

II

공간도형과 공간좌표

01. 직선과 평면의 위치 관계
02. 삼수선 정리
03. 정사영
04. 공간좌표
05. 구의 방정식



이 단원에서는...

공간에서 직선과 평면의 위치 관계에 대한 증명을 하고, 삼수선 정리를 이해하고, 도형과 정사영의 관계를 탐구한다. 또, 좌표공간에서 두 점 사이의 거리와 선분의 내분을 학습하고 구를 방정식으로 표현해 본다.

핵심 아이디어

공간좌표와 식을 활용하는 것은 공간도형의 기하적 성질을 탐구하는 데 유용한 방법이다.



수학적 사고의 대상을 평면에서 공간으로 확장하여 공간도형의 성질을 이해하는 것은 일상생활에 필요한 공간 감각을 기르는 데 도움이 되고, 공간에서의 문제해결에 이를 활용할 수 있다. 평면좌표와 마찬가지로 공간에 좌표 개념을 도입한 공간좌표를 이용하여 공간도형을 대수적으로 표현하고 연구할 수 있다. 공간도형은 미술, 건축, 공학 등에 활용되며, 3D 게임, 시뮬레이션 등의 컴퓨터 그래픽은 모두 공간좌표를 기반으로 한다.

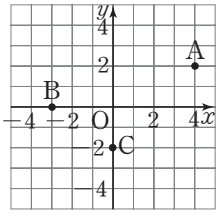
이전에 무엇을 배웠을까?

이 단원에 들어가기 전에



중1

1 다음 좌표평면에서 세 점 A, B, C의 좌표를 구하시오.



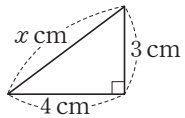


좌표평면 위의 점에 대응하는 x의 값과 y의 값을 순서쌍 (x, y)로 나타내면 돼.

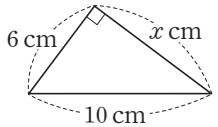
중2

3 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



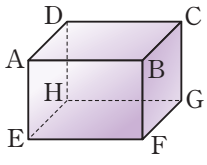


피타고라스 정리를 이용해.



중1

2 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하시오.



(1) 면 ABCD와 평행한 모서리

(2) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리



공간에서 평면과 직선이 서로 평행할 조건과 두 직선이 꼬인 위치에 있을 조건을 떠올려 봐.

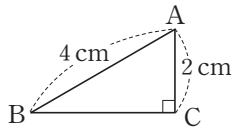


Ⅱ 공간도형과 공간좌표



중3

4 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\cos A$의 값을 구하시오.



공통 수학2

6 중심의 좌표가 $(3, 2)$이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식을 구하시오.



중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이야.

공통 수학2

5 두 점 $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 점 A, B 사이의 거리

(2) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표



좌표평면에서 두 점 사이의 거리와 선분을 내분하는 점의 좌표를 구하는 방법을 떠올려 봐.

01 직선과 평면의 위치 관계

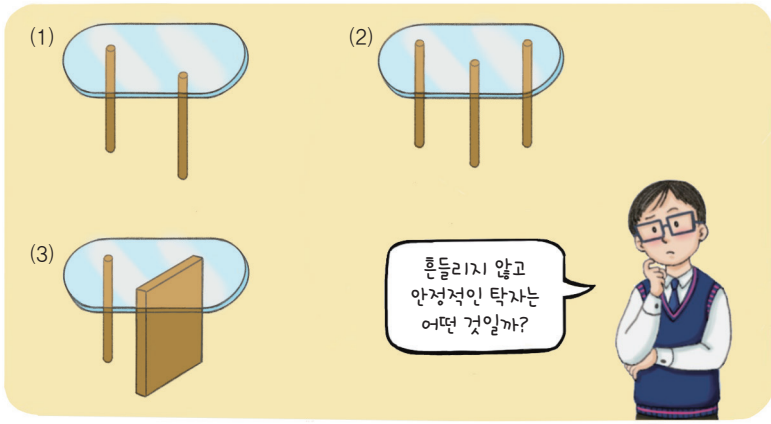
성취기준 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

평면의 결정 조건은 무엇일까?

생각 열기

의사소통

다음은 은우가 만든 세 종류의 탁자이다.



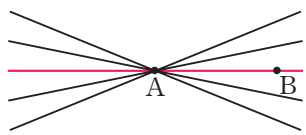
❶ 위의 세 종류의 탁자에서 막대 다리와 판자 다리의 길이가 모두 같을 때, 상판이 흔들리지 않고 안정적인 탁자를 모두 찾아보자.

❷ 안정적인 탁자를 만들기 위해 막대 다리 또는 판자 다리를 이용하는 방법을 친구들과 이야기해 보자.

평면의 결정 조건

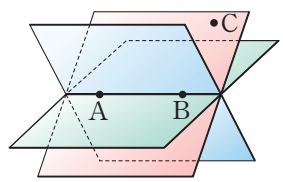
공간에서 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 오직 하나뿐이다.

따라서 서로 다른 두 점은 하나의 직선을 결정한다.



또, 공간에서 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많지만 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 오직 하나뿐이다.

따라서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정한다.



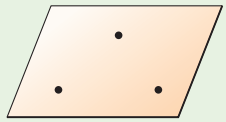
이때 서로 다른 두 점 A, B는 한 직선을 결정하므로 직선 AB와 직선 AB 위에 있지 않은 한 점 C도 한 평면을 결정한다.

또, 공간에서 두 직선이 한 점에서 만나거나 평행한 경우에도 이 두 직선은 한 평면을 결정한다.

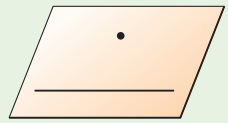
이상을 정리하면 다음과 같다.

평면의 결정 조건

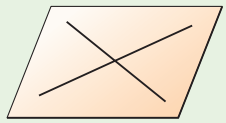
1 한 직선 위에 있지 않은 세 점



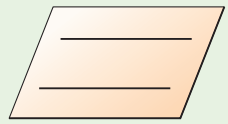
2 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점



3 한 점에서 만나는 두 직선



4 평행한 두 직선





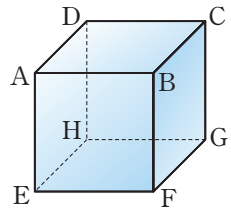
보기 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서

(1) 세 점 A, B, C는 평면 ABCD를 결정한다.

(2) 직선 AB와 점 C는 평면 ABCD를 결정한다.

(3) 직선 AB와 직선 AE는 평면 AEFB를 결정한다.

(4) 직선 AD와 직선 EH는 평면 AEHD를 결정한다.



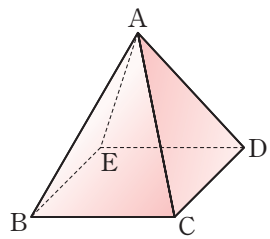
문제 1 **오른쪽 그림과 같은 정사각뿔에서 다음 중 하나의 평면을 결정할 수 있는 것을 모두 고르시오.**

(1) 세 점 A, B, D

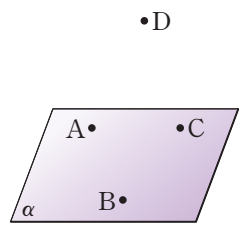
(2) 직선 AC와 점 E

(3) 직선 AB와 직선 CD

(4) 직선 BE와 직선 CD



문제 2 **오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 세 점 A, B, C와 평면 α 위에 있지 않은 점 D가 있다. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않을 때, 네 점 A, B, C, D 중에서 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수를 구하시오.**



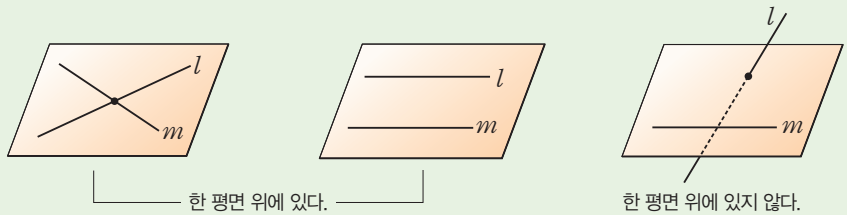
공간에서 직선, 평면은 어떤 위치 관계가 있을까?

공간에서 직선, 평면의 위치 관계

공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

공간에서 두 직선의 위치 관계

1 한 점에서 만난다. **2** 평행하다. **3** 꼬인 위치에 있다.



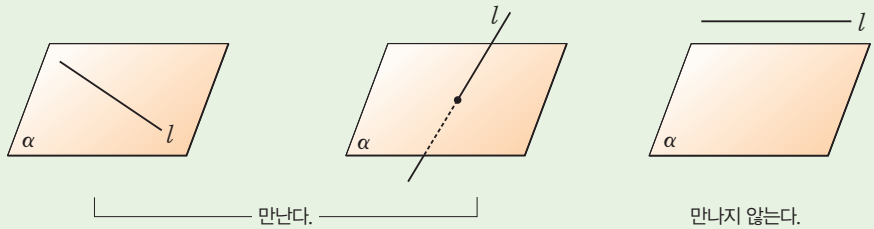
배운 내용 떠올리기

두 직선 l, m이 한 평면 위에 있고 만나지 않을 때, 두 직선 l, m은 서로 평행하다고 하며, 기호 $l \parallel m$으로 나타낸다.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계

1 직선이 평면에 포함된다. **2** 한 점에서 만난다. **3** 평행하다.



배운 내용 떠올리기

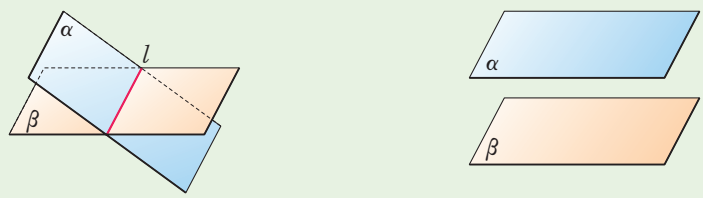
직선 l과 평면 α가 만나지 않을 때, 직선 l과 평면 α는 서로 평행하다고 하며, 기호 $l \parallel \alpha$로 나타낸다.

직선이 평면에 포함되는 경우 직선은 평면 위에 있다고 한다.

공간에서 서로 다른 두 평면의 위치 관계는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

공간에서 두 평면의 위치 관계

1 만난다. **2** 평행하다.



공간에서 서로 다른 두 평면이 만날 때, 두 평면은 한 직선을 공유한다. 이때 공유하는 직선을 두 평면의 **교선**이라고 한다.

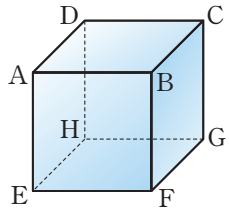
예를 들어 공간에서 두 평면의 위치 관계 **1**에서 직선 l이 두 평면 α와 β의 교선이다.

한편, 두 평면 α, β가 만나지 않을 때, 두 평면 α, β는 서로 평행하다고 하며, 기호

$$\alpha /\!/ \beta$$

로 나타낸다.

보기 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서

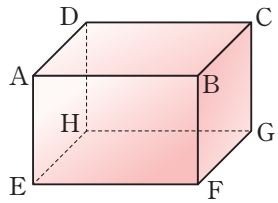


(1) 두 직선 AB, BF는 한 점에서 만나고, 두 직선 AB, EF는 서로 평행하며, 두 직선 AB, CG는 꼬인 위치에 있다.

(2) 직선 AB는 평면 AEFB에 포함되고, 직선 AB와 평면 BFGC는 한 점에서 만나며, 직선 AB와 평면 EFGH는 서로 평행하다.

(3) 두 평면 ABCD, AEFB는 만나고, 두 평면의 교선은 직선 AB이다. 또, 두 평면 ABCD, EFGH는 서로 평행하다.

문제 3 **오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음을 구하시오.**



(1) 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선

(2) 직선 AE와 평행한 평면

(3) 평면 AEHD와 평행한 평면

예제 1 두 직선의 평행 증명하기

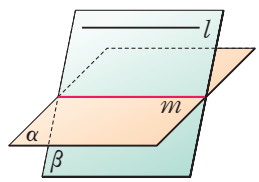
직선 l과 평면 α가 서로 평행하고, 직선 l을 포함하고 평면 α와 만나는 평면 β가 있다. 두 평면 α와 β의 교선을 m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하시오.

증명

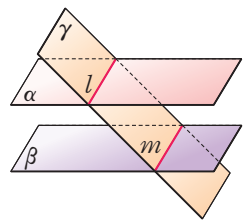
두 직선 l과 m은 같은 평면 β 위에 있다.

한편, 직선 l과 평면 α는 서로 평행하므로 만나지 않는다. 이때 직선 m은 평면 α 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.

따라서 두 직선 l, m은 한 평면 위에 있고 만나지 않으므로 $l /\!/ m$이다.



문제 4 **오른쪽 그림과 같이 평행한 두 평면 α, β가 평면 γ와 만날 때 생기는 교선을 각각 l, m이라고 할 때, $l /\!/ m$임을 증명하시오.**

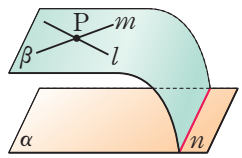


문제 5 서로 평행한 두 평면 α, β에 대하여 직선 l이 평면 α에 포함될 때, $l \parallel \beta$임을 증명하시오.

예제 2 두 평면의 평행 증명하기

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 서로 다른 두 직선 l, m을 포함하는 평면을 β라고 할 때, $\alpha \parallel \beta$임을 증명하시오.

증명



두 평면 α, β가 평행하지 않다고 가정하고 두 평면 α, β의 교선을 n이라고 하자.

이때 직선 n은 평면 α 위에 있고 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$이므로 직선 n은 두 직선 l, m과 만나지 않는다.

그런데 세 직선 l, m, n은 모두 한 평면 β 위에 있으므로

$l \parallel n$, $m \parallel n$, 즉 $l \parallel m$

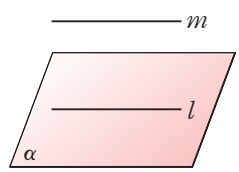
이것은 두 직선 l, m이 한 점 P에서 만난다는 것에 모순이다.

따라서 $\alpha \parallel \beta$이다.

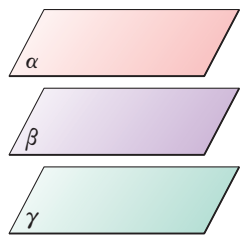
배운 내용 떠올리기

명제 또는 명제의 결론을 부정한 다음 모순이 생기는 것을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

문제 6 오른쪽 그림과 같이 직선 l을 포함하고 직선 m을 포함하지 않는 평면 α가 있다. 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, $m \parallel \alpha$임을 증명하시오.



문제 7 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 $\alpha \parallel \beta$, $\beta \parallel \gamma$일 때, $\alpha \parallel \gamma$임을 증명하시오.



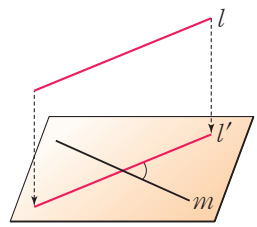
공간에서 두 직선이 이루는 각은 어떻게 정할까?

두 직선이 이루는 각

한 점에서 만나는 서로 다른 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면 위에서 두 직선이 이루는 각을 정할 수 있다.

한편, 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선이 이루는 각은 다음과 같이 정한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l과 m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l에 평행하면서 직선 m과 한 점에서 만나는 직선을 l'이라고 하면 두 직선 l'과 m은 한 평면을 결정한다.



두 직선이 이루는 각은 크기가 크지 않은 쪽의 각을 의미한다.

이때 두 직선 l'과 m이 이루는 각을 두 직선 l과 m이 이루는 각이라고 한다.

특히, 두 직선 l과 m이 이루는 각이 직각일 때 두 직선 l과 m은 서로 수직이라고 하며, 기호

$$l \perp m$$

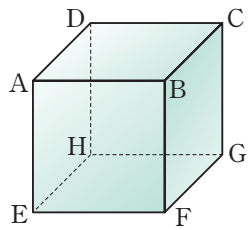
으로 나타낸다.

예제 3 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.

(1) 직선 AB, 직선 DH

(2) 직선 AF, 직선 CG



풀이

(1) 직선 DH와 직선 AE는 서로 평행하고, 두 직선 AB, AE가 이루는 각의 크기는 90°이다.
따라서 두 직선 AB, DH가 이루는 각의 크기는 90°이다.

(2) 직선 CG와 직선 BF는 서로 평행하고, 두 직선 AF, BF가 이루는 각의 크기는 45°이다.
따라서 두 직선 AF, CG가 이루는 각의 크기는 45°이다.

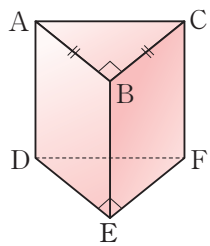
답 (1) 90° (2) 45°

문제 8

오른쪽 그림과 같이 밑면이 직각이등변삼각형인 삼각기둥에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.

(1) 직선 AD, 직선 BC

(2) 직선 AC, 직선 EF



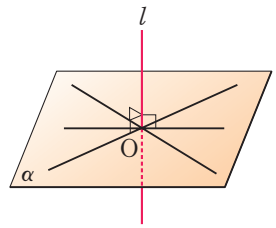
직선과 평면의 수직은 무엇일까?

직선과 평면의 수직

공간에서 직선 l이 평면 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 서로 수직이라고 하며, 기호

$$l \perp \alpha$$

로 나타낸다.



이때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 직선 l과 평면 α가 만나는 점 O를 수선의 발이라고 한다.

예제 4 직선과 평면의 수직 증명하기

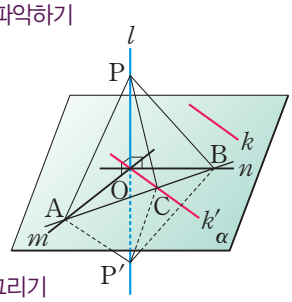
평면 α와 한 점 O에서 만나는 직선 l이 있다. 직선 l이 점 O에서 만나는 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$임을 증명하시오.

증명

단계❶ 문제의 상황을 그림으로 나타내고, 무엇을 증명해야 하는지 파악하기

오른쪽 그림과 같이 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 임의의 직선 k에 대하여 직선 k가 점 O를 지나도록 평행이동시킨 직선을 k'이라고 하자.

이때 직선 l이 평면 α에 수직임을 보이려면 직선 l과 직선 k'이 수직임을 보이면 된다.



단계❷ 세 직선 m, n, k'과 점 O 이외의 점에서 만나는 한 직선을 그리기

평면 α 위의 세 직선 m, n, k'과 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 긋고 그 교점을 각각 A, B, C라고 하자.

또, 직선 l 위에 $\overline{OP}=\overline{OP'}$인 서로 다른 두 점 P, P′을 잡는다.

단계❸ 삼각형 PCP′이 이등변삼각형임을 보이기

두 직선 m, n은 모두 선분 PP′의 수직이등분선이다.

이때 $\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$이고 선분 AB는 공통이므로 $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$

즉, $\angle PAC = \angle P'AC$

또, $\overline{AP}=\overline{AP'}$이고 선분 AC는 공통이므로

$$\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$$

따라서 $\overline{CP}=\overline{CP'}$이므로 삼각형 PCP′은 이등변삼각형이다.

단계❹ 이등변삼각형의 성질을 이용하여 $l \perp k'$임을 보이고 $l \perp \alpha$임을 보이기

점 O는 선분 PP′의 중점이므로 $\overline{PP'} \perp \overline{OC}$, 즉 $l \perp k'$

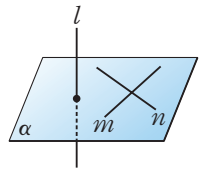
그런데 $k' /\!/ k$이므로 $l \perp k$

따라서 직선 l은 평면 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$이다.

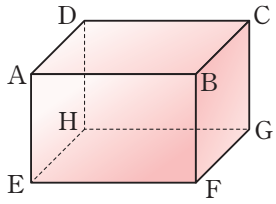
〈참고〉 공간에서 직선 l과 평면 α에 대하여 $l \perp \alpha$임을 보이려면, 평면 α 위에 있고 평행하지 않은 서로 다른 두 직선 m, n에 대하여

$l \perp m$, $l \perp n$

임을 보이면 된다.



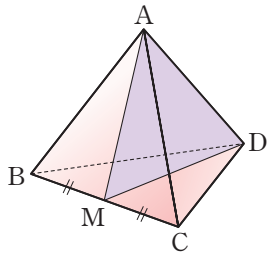
문제 9 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 직선 EH와 수직인 평면을 찾고, 그 이유를 설명하시오.



문제 10 오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 모서리 BC의 중점을 M이라고 할 때, 다음을 증명하시오.

(1) $\overline{BC} \perp$(평면 AMD)

(2) $\overline{BC} \perp \overline{AD}$



생각 넓히기

문제해결 추론

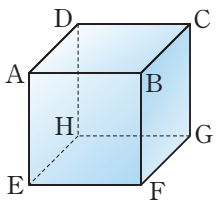
서로 다른 두 직선 l, m과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별해 보자.

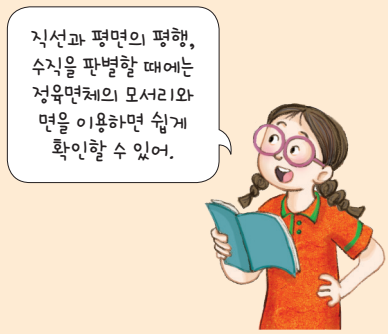
(1) $l \parallel \alpha$, $l \parallel \beta$이면 $\alpha \parallel \beta$이다.

(2) $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$이면 $l \parallel m$이다.

(3) $l \perp \alpha$, $l \perp \beta$이면 $\alpha \parallel \beta$이다.

(4) $l \parallel \alpha$, $m \perp \alpha$이면 $l \perp m$이다.





01 학습 목표 되새기기

다음 문장을 읽고 맞으면 ○, 틀리면 ×를 ( ) 안에 써넣으시오.

(1) 공간에서 서로 다른 두 직선은 한 점에서 만나거나 평행하다. ( )

(2) 직선과 평면이 만나지 않으면 평행하다. ( )

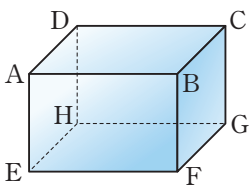
(3) 서로 다른 두 평면이 만날 때 생기는 직선을 교선이라고 한다. ( )

(4) 꼬인 위치에 있는 두 직선 l과 m이 이루는 각의 크기는 직선 l을 직선 m과 한 점에서 만나도록 평행이동한 직선 l'과 직선 m이 이루는 각의 크기와 같다. ( )

(5) 평면 α와 한 점에서 만나는 직선 l이 평면 α 위의 한 직선과 수직이면 직선 l과 평면 α는 서로 수직이다. ( )

02

오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 하나의 평면을 결정할 수 있는 것만을 **보기**에서 있는 대로 고르시오.



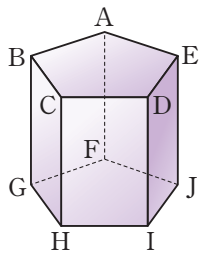
보기

ㄱ. 세 점 A, B, G　　ㄴ. 직선 AC, 점 F

ㄷ. 직선 AE, 직선 EG　　ㄹ. 직선 AF, 직선 DH

03

오른쪽 그림과 같은 정오각기둥에서 다음을 구하시오. (단, 정오각기둥의 각 모서리를 포함하는 직선만을 생각한다.)



(1) 직선 AB와 평행한 직선

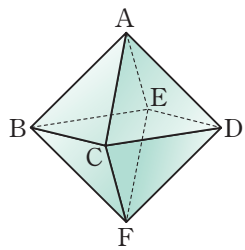
(2) 직선 CD와 꼬인 위치에 있는 직선

(3) 직선 CH를 포함하는 평면

(4) 평면 ABCDE와 평행한 평면

04

오른쪽 그림과 같은 정팔면체에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.



(1) 직선 AB, 직선 BF

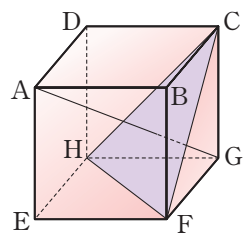
(2) 직선 AD, 직선 CF

05 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서

$\overline{AG} \perp$(평면 CHF)

임을 증명하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.



(1) $\overline{AB} \perp$(평면 BFGC), $\overline{BG} \perp \overline{CF}$임을 이용하여 $\overline{CF} \perp$(평면 AHGB)임을 보이시오.

(2) $\overline{AD} \perp$(평면 DHGC), $\overline{DG} \perp \overline{CH}$임을 이용하여 $\overline{CH} \perp$(평면 AFGD)임을 보이시오.

(3) (1), (2)의 결과를 이용하여 $\overline{AG} \perp$(평면 CHF)임을 보이시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.	☺ ☺ 😐

02 삼수선 정리

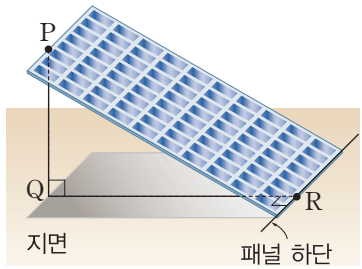
성취기준 삼수선 정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.



삼수선 정리는 무엇일까?

생각 열기

오른쪽 그림과 같이 태양광 패널이 지면에 비스듬하게 설치되어 있다. 태양광 패널 상단 위의 한 점을 P라 하고, 점 P에서 지면에 내린 수선의 발을 Q라고 하자. 점 Q에서 패널 하단에 내린 수선의 발을 R라고 할 때, 직선 PR와 패널의 하단이 이루는 각의 크기를 추측해 보자.



삼수선 정리

위의 **생각 열기**에서 직선과 평면의 수직을 이용하여 직선 PR와 패널의 하단이 이루는 각의 크기를 추측할 수 있다.

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

1 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위의 직선이므로

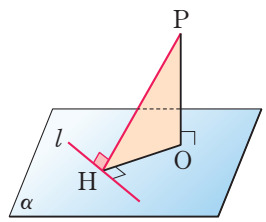
$$\overline{PO}\perp l$$

이다. 또, $\overline{OH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{OH}$를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.

이때 $\overline{PH}$는 평면 PHO에 포함되므로

$$\overline{PH}\perp l$$

이다.



2 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 직선 l은 평면 α 위의 직선이므로

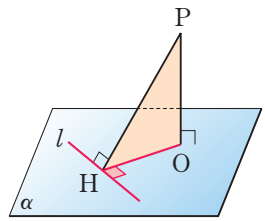
$$\overline{PO}\perp l$$

이다. 또, $\overline{PH}\perp l$이므로 직선 l은 $\overline{PO}$와 $\overline{PH}$를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.

이때 $\overline{OH}$는 평면 PHO에 포함되므로

$$\overline{OH}\perp l$$

이다.



3 $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

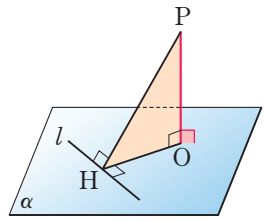
$\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$이므로 $\overline{PH}$와 $\overline{OH}$를 포함하는 평면 PHO는 직선 l과 수직이다.

이때 $\overline{PO}$는 평면 PHO에 포함되므로 $\overline{PO}$와 직선 l은 수직이다.

또, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이므로 $\overline{PO}$는 직선 l과 $\overline{OH}$를 포함하는 평면 α와 수직이다. 즉,

$$\overline{PO}\perp\alpha$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 **삼수선 정리**라고 한다.

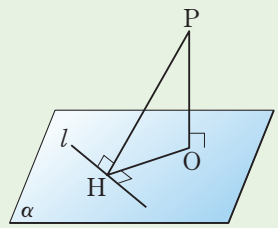
삼수선 정리

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여

1 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 $\overline{PH}\perp l$

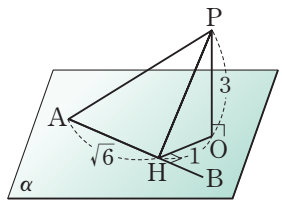
2 $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 $\overline{OH}\perp l$

3 $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$



예제 1 삼수선 정리를 이용하여 선분의 길이 구하기

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{PO}=3$, $\overline{OH}=1$, $\overline{AH}=\sqrt{6}$일 때, 선분 PA의 길이를 구하시오.



풀이

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{OH}$가 평면 α에 포함되므로

$$\overline{PO}\perp\overline{OH}$$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

한편, $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리 **1**에 의하여

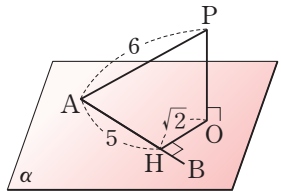
$$\overline{PH}\perp\overline{AB}$$

따라서 삼각형 PHA는 직각삼각형이므로

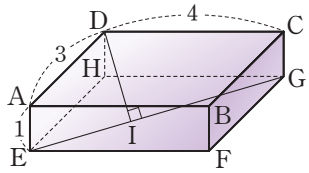
$$\overline{PA}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{16}=4$$

답 4

문제 1 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{AP}=6$, $\overline{AH}=5$, $\overline{OH}=\sqrt{2}$일 때, 선분 PO의 길이를 구하시오.



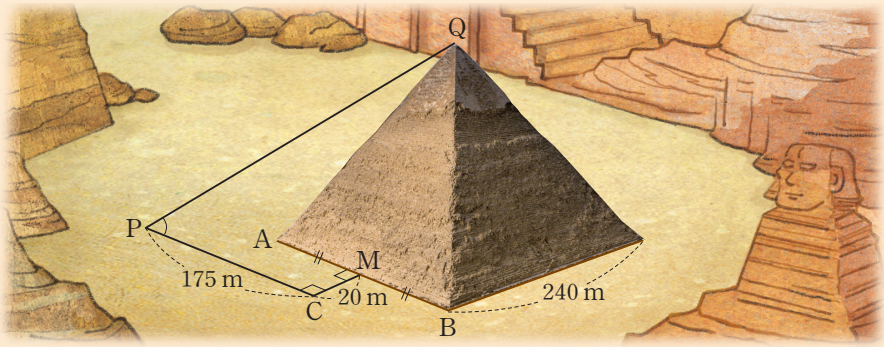
문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{AE}=1$인 직육면체의 꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, 선분 DI의 길이를 구하시오.



생각 넓히기

문제해결 연결

다음 그림과 같이 지면 위의 한 지점을 P, 밑면이 정사각형이고 옆면이 이등변삼각형인 정사각뿔 모양의 피라미드의 정상을 Q라고 하자. 피라미드의 밑면의 한 변 AB의 중점을 M이라 하고 $\overline{AB}\perp\overline{MC}$, $\overline{PC}\perp\overline{MC}$를 만족시키는 지점 C를 지면 위에 잡았더니 $\overline{AB}=240\text{ m}$, $\overline{PC}=175\text{ m}$, $\tan(\angle QPC)=\frac{29}{25}$이었다. 이 피라미드의 높이를 구해 보자.



이면각은 무엇일까?

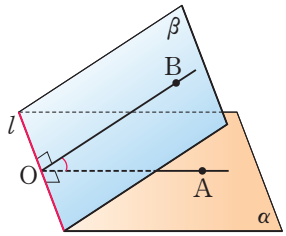
이면각

공간에서 두 평면이 이루는 각에 대하여 알아보자.

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나누는데 그 각각을 반평면이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 **이면각**이라고 한다.

이때 직선 l을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



이면각의 변 l 위의 점 O를 지나고 직선 l에 수직인 두 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그으면 $\angle AOB$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다.

이때 이 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

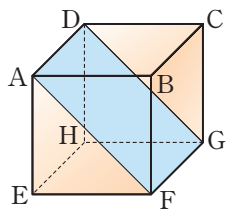
일반적으로 서로 다른 두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중 크기가 크지 않은 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각의 크기라고 한다.

특히, 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 90°일 때, 두 평면 α와 β는 서로 수직이라고 하며, 기호

$$\alpha \perp \beta$$

로 나타낸다.

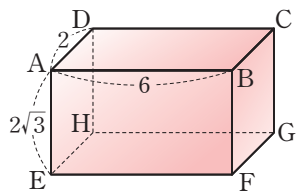
보기 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 ABCD와 평면 AFGD의 교선 AD에 대하여 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AF} \perp \overline{AD}$이고 $\angle BAF = 45^\circ$이다.
따라서 평면 ABCD와 평면 AFGD가 이루는 각의 크기는 45°이다.



문제 3 **오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=2\sqrt{3}$인 직육면체에서 다음 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하시오.**

(1) 평면 ABCD와 평면 DEFC

(2) 평면 ABCD와 평면 CHEB

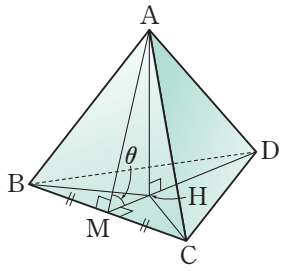


예제 2 이면각 활용하기

정사면체에서 두 면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

풀이

오른쪽 그림과 같이 정사면체의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H, 모서리 BC의 중점을 M이라고 하자.



$\overline{AH}\perp\overline{HM}$, $\overline{AM}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HM}\perp\overline{BC}$$

따라서 $\theta=\angle AMH$이다.

한편, 세 삼각형 ABH, ACH, ADH는 모두 합동이므로

$$\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{DH}$$

즉, 점 H는 삼각형 BCD의 외심이다.

이때 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

따라서 $\overline{HM}=\frac{1}{3}\overline{DM}$이고 $\overline{DM}=\overline{AM}$이므로

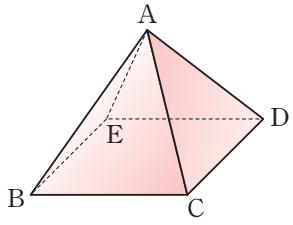
$$\cos\theta=\frac{\overline{HM}}{\overline{AM}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

배운 내용 떠올리기

삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.

문제 4 **오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔에서 밑면과 옆면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.**

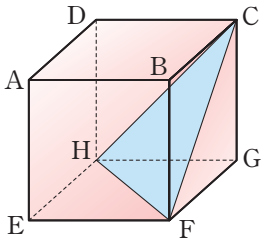


생각 넓히기

추론 의사소통

다음 문제에 대하여 두 학생이 나눈 대화를 읽고, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때 주의해야 할 점을 친구들과 이야기해 보자.

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.





은우

평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각은 각 CFG이니까 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$야.



지유

평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각은 각 CFG가 아니야. 나는 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이 나왔어.

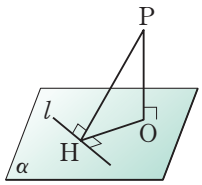
스스로 확인하기

02. 삼수선 정리
정답 및 해설 183쪽

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립하고 이것을 □ 정리라고 한다.



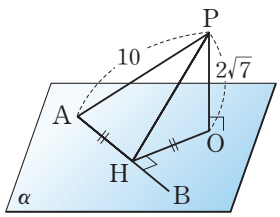
(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면 □

(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면 □

(3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면 □

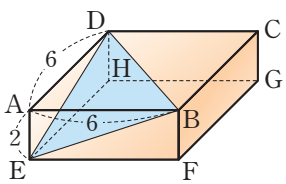
02

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{PO}=2\sqrt{7}$, $\overline{AP}=10$, $\overline{AH}=\overline{OH}$일 때, 선분 PH의 길이를 구하시오.



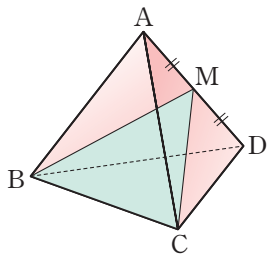
03

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{AE}=2$인 직육면체에서 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



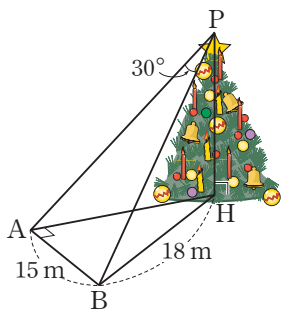
04

오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 모서리 AD의 중점을 M이라 하고, 평면 BCM과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



05 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림과 같이 세워진 크리스마스트리의 높이를 구하려고 한다. 크리스마스트리의 꼭대기를 P라 하고, 점 P에서 지면 위에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\angle APB=30^\circ$인 지면 위의 두 지점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=15$ m, $\overline{BH}=18$ m이고 $\angle HAB=90^\circ$일 때, 크리스마스트리의 높이를 구하시오.





나의 학습을 스스로 점검해 보자.

삼수선 정리를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	☺ ☺ ☺

수학으로 꿈꾸는 미래

공간정보 연구원

진로



공간정보란 무엇인가요?



「국가공간정보 기본법」에 따르면 공간정보는 지상·지하·수상·수중 등 공간상에 존재하는 자연적 또는 인공적인 객체에 대한 위치 정보 및 이와 관련된 공간적 인지 및 의사 결정에 필요한 정보를 말합니다. 국토의 공간상에 존재하는 모든 정보를 활용해 새로운 정보를 만들고 제공할 수 있다는 점에서 공간정보라는 말을 많이 사용합니다.





공간정보가 왜 필요한가요?



공간정보를 통해 국가의 경계에서부터 행정 구역과 선거구, 조세 구역 등 각종 사회 영역을 확정할 수 있습니다. 또, 국토의 지형 및 지리에 대한 공간정보를 통해 도로, 철도, 항만 및 항공 시설 등의 최적의 입지를 선정하여 경제적 손실을 최소화할 수 있습니다. 즉, 공간정보를 기반으로 국토의 효율적인 관리 및 발전을 위해 필요하며, 이러한 효율적인 관리와 발전을 통해 국가 대외 경쟁력을 확보할 수 있습니다.



공간정보는 어떻게 활용되나요?



주변 상권 검색하기, 대중교통의 도착 정보 알기 등은 공간정보기술이 있어 탄생한 생활 서비스입니다. 또, 자동차의 내비게이션, 우리 아이의 위치 찾기 서비스, 손상된 문화재의 복원 및 관리에도 공간정보가 활용됩니다. 향후 공간정보 빅데이터가 구축되면 특정 공간을 기준으로 평균 소득이나 주거 형태, 전기 사용량 등을 파악할 수 있게 되고, 위치 정보와 구매 정보 등을 결합하면 해당 지역에 대한 가상 현실 시뮬레이션이 가능해질 것입니다.



공간정보 연구원은 어떤 일을 하나요? 또, 앞으로의 전망은 어떤가요?



지상·지하·수상·수중 등의 다양한 정보를 활용해 새로운 가치의 공간정보를 만들고, 공간정보에 대한 정책과 기술 개발, 제도 수립 등에 필요한 연구를 수행합니다. 따라서 공간정보 연구원은 4차 산업 혁명과 연계하여 건설·국방·안전·문화재 복원 등 다양한 분야에서 전문성을 발휘할 수 있습니다. 정부가 국가 공간정보 체계 구축을 위해 디지털 지적 사업, 위치 기반 서비스(LBS), 지능형 교통 체계(ITS) 등 다양한 분야에서 공간정보 융·복합 산업의 전략적 투자를 지속해서 늘려 가고 있으므로 공간정보 연구원의 수요는 증가할 것으로 예상됩니다.

출처: LX공간정보연구원(https://lxsiri.re.kr)
워크넷(https://www.work.go.kr)

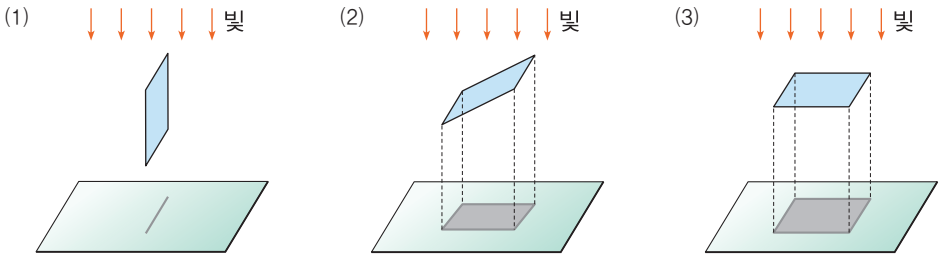
03 정사영

성취기준 도형의 정사영의 뜻을 알고, 도형과 정사영의 관계를 탐구할 수 있다.

정사영은 무엇일까?

생각 열기 추론

다음 그림과 같이 빛이 바닥에 수직인 방향으로 직사각형을 비추고 있다. 직사각형의 한 변은 바닥과 평행을 유지한 상태로 직사각형이 바닥과 이루는 각을 변화시킬 때, 직사각형의 그림자의 모양을 살펴보려고 한다. 이때 직사각형의 그림자의 넓이가 최대가 되는 경우를 말해 보자.



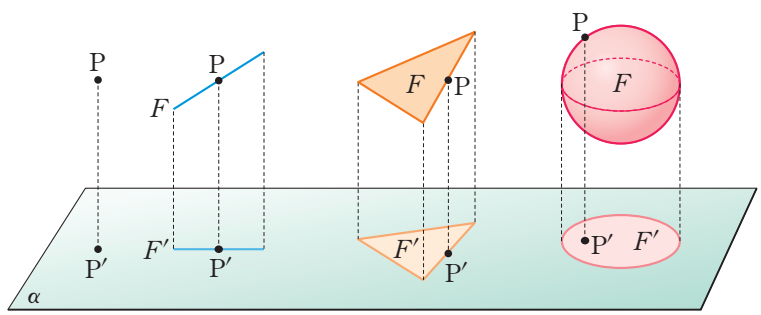
정사영

위의 **생각 열기**에서 직사각형이 바닥과 이루는 각을 변화시킴에 따라 직사각형의 그림자는 여러 가지 모양이 나오고, 직사각형이 바닥과 평행할 때 그림자의 넓이는 최대가 된다.

한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 할 때, 점 P′을 점 P의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.

또, 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형을 F'이라고 할 때, 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

다음 그림은 여러 가지 도형의 평면 α 위로의 정사영이다.

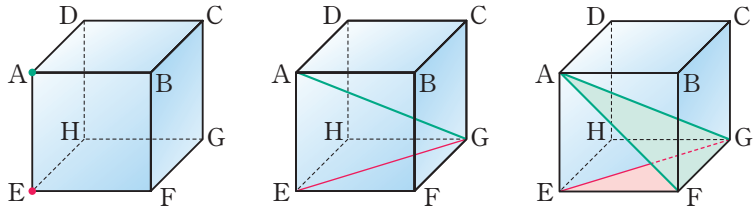


일반적으로 평면 위로의 정사영에서 점의 정사영은 점이고, 직선의 정사영은 한 점 또는 직선이다. 또, 다각형의 정사영은 선분이거나 다각형이고, 구의 정사영은 원이다.

Q 직선의 평면 α 위로의 정사영이 점이 되는 경우는 언제인가요? 또, 다각형의 평면 α 위로의 정사영이 선분이 되는 경우는 언제인가요?

A 직선이 평면 α에 수직이면 직선의 평면 α 위로의 정사영은 점이 됩니다. 또, 다각형을 포함하는 평면이 평면 α에 수직이면 다각형의 평면 α 위로의 정사영은 선분이 됩니다.

보기 다음 그림과 같은 정육면체에서

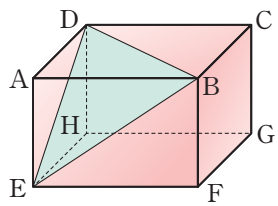


(1) 점 A의 평면 EFGH 위로의 정사영은 점 E이다.

(2) 대각선 AG의 평면 EFGH 위로의 정사영은 선분 EG이다.

(3) 삼각형 AFG의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이다.

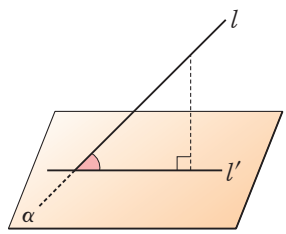
문제 1 **오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 삼각형 DEB의 평면 EFGH 위로의 정사영을 구하시오.**



정사영의 길이와 넓이는 어떻게 구할까?

정사영의 길이

오른쪽 그림과 같이 직선 l과 평면 α가 한 점에서 만나고 서로 수직이 아닐 때, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 직선 l'이라고 하자.

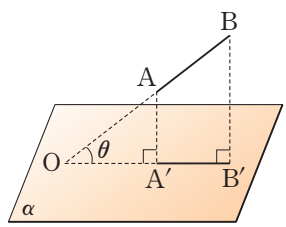


이때 두 직선 l과 l'이 이루는 각의 크기를 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기라고 한다.

특히, $l /\!/ \alpha$일 때 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 0°이고, $l \perp \alpha$일 때 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기는 90°이다.

이제 선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계를 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 두 직선 AB, A′B′의 교점을 O라고 하자.



이때 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라고 하면

$$\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\theta,\ \overline{OB'}=\overline{OB}\cos\theta$$

이므로

$$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}=(\overline{OB}-\overline{OA})\cos\theta=\overline{AB}\cos\theta$$

이다.

한편, 이 식은 직선 AB와 평면 α가 평행하거나 수직인 경우에도 성립한다.

(1) $\theta=0^\circ$일 때
$\overline{AB} /\!/ \alpha$이므로
$\overline{A'B'}=\overline{AB}=\overline{AB}\cos 0^\circ$

(2) $\theta=90^\circ$일 때
선분 AB의 평면 α 위로의 정사영은 한 점이므로
$\overline{A'B'}=0=\overline{AB}\cos 90^\circ$

이상을 정리하면 다음과 같다.

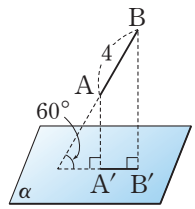
정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 할 때

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

보기 오른쪽 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영이 선분 A′B′이고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 60°일 때

$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$



문제 2 **선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하시오.**

(1) $\overline{AB}=6$, $\theta=30^\circ$일 때, 선분 A′B′의 길이

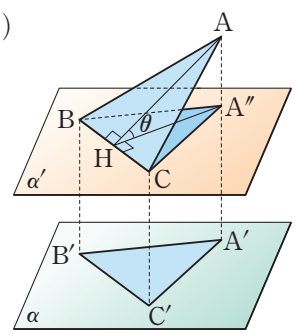
(2) $\overline{AB}=8$, $\overline{A'B'}=4\sqrt{2}$일 때, θ의 크기

(3) $\overline{A'B'}=5$, $\theta=60^\circ$일 때, 선분 AB의 길이

정사영의 넓이

도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이의 관계를 알아보자.

삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$라 하고, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 A′B′C′이라고 하자.



삼각형 ABC의 한 변 BC가 평면 α와 평행한 경우, 오른쪽 그림과 같이 변 BC를 포함하고 평면 α에 평행한 평면을 α', 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H, 평면 α'과 직선 AA′의 교점을 A″이라고 하면 삼수선 정리에 의하여 $\overline{A''H} \perp \overline{BC}$이므로 $\angle AHA'' = \theta$이다.

$\overline{AA''} \perp \alpha$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$이므로
$\overline{A''H} \perp \overline{BC}$

삼각형 ABC, A′B′C′의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면 삼각형 A′B′C′의 넓이는 삼각형 A″BC의 넓이와 같으므로

$$S' = \triangle A'B'C' = \triangle A''BC$$
$$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{A''H} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}\cos\theta = S\cos\theta$$

이다.

(1) $\theta=0^\circ$일 때
삼각형 ABC는 평면 α' 위에 있고 $\alpha \parallel \alpha'$이므로
$\triangle A'B'C'$
$= \triangle ABC$
$= \triangle ABC \times \cos 0^\circ$

(2) $\theta=90^\circ$일 때
삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영은 선분이므로
$\triangle A'B'C'$
$= 0$
$= \triangle ABC \times \cos 90^\circ$

한편, 이 식은 변 BC가 평면 α와 평행하지 않은 경우에도 성립하고, 평면 ABC와 평면 α가 서로 평행하거나 수직인 경우에도 성립한다.

일반적으로 도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이에는 다음 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

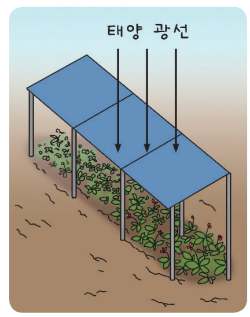
평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 할 때

$$S' = S\cos\theta$$

보기 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이고, 평면 β 위에 있는 어떤 도형의 넓이가 20일 때, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 하면

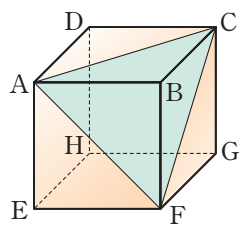
$$S' = 20\cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

문제 3 어느 밭에 설치한 차광막이 지면과 이루는 각의 크기는 30°이고, 태양 광선이 지면에 수직인 방향으로 비출 때 생기는 차광막의 그림자의 넓이가 $50\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$이다. 이 차광막의 넓이를 구하시오.



예제 1 정사영의 넓이 활용하기

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 평면 AFC와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



풀이

정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형이므로

$$\triangle \mathrm{AFC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이므로

$$\triangle \mathrm{EFG} = \triangle \mathrm{AFC} \times \cos\theta$$

한편, $\triangle \mathrm{EFG} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2}a^2$이므로

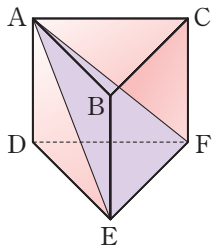
$$\cos\theta = \frac{\triangle \mathrm{EFG}}{\triangle \mathrm{AFC}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 4 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정삼각기둥에서 평면 AEF와 평면 DEF가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 다음을 구하시오.

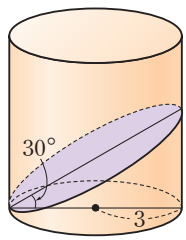
(1) 삼각형 AEF의 평면 DEF 위로의 정사영의 넓이

(2) $\cos\theta$의 값

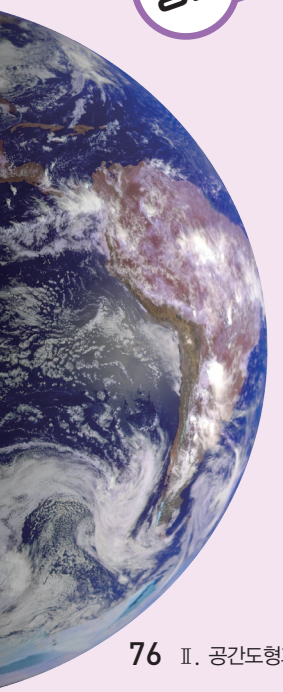


문제 5 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3인 원기둥을 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 자른 단면의 넓이를 구하시오.

(단, 이 원기둥의 높이는 $2\sqrt{3}$보다 크다.)

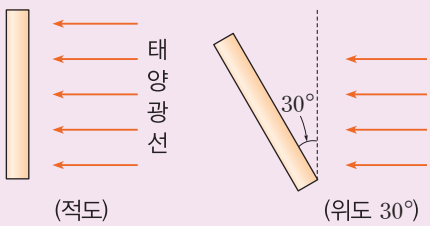


생활 속 수학 여행



위도(緯度, latitude)는 지구상에서 적도를 기준으로 북쪽 또는 남쪽으로 얼마나 떨어져 있는지를 나타내는 지표이다. 위도의 단위는 °(도)이고, 위도 0°는 적도이며 위도 90°는 북극 또는 남극이다. 단위 면적당 받는 태양 광선의 양은 위도에 따라 달라지는데, 그 이유를 정사영을 통해 이해할 수 있다.

예를 들어 적도에서 단위 면적당 받는 태양 광선의 양을 M이라고 하면, 위도 30°인 지역은 같은 양의 태양 광선을 받는 면적이 $\frac{1}{\cos 30^\circ}$배가 되므로 단위 면적당 받는 태양 광선의 양은 $M \div \frac{1}{\cos 30^\circ} = M \times \cos 30^\circ$이다. 즉, 위도가 높을수록 단위 면적당 받는 태양 광선의 양이 적어지므로 평균 기온이 낮아진다.



출처: 김형진, 윤용석, 최희정, 『와이즈만 과학사전』, ㈜창의와탐구, 2014, 238쪽
두산백과사전 두피디아(https://www.doopedia.co.kr)

스스로 확인하기

01 학습 목표 되새기기

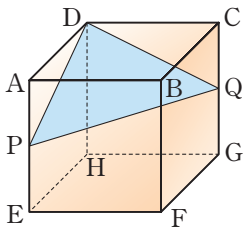
다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 할 때
$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times$ □

(2) 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 할 때
$S' = S \times$ □

02

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 점 P, Q가 각각 두 모서리 AE, CG 위의 점일 때, 다음을 구하시오.



(1) 선분 PQ의 평면 EFGH 위로의 정사영

(2) 삼각형 DPQ의 평면 ABCD 위로의 정사영

03

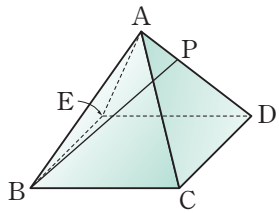
선분 AB의 평면 α 위로의 정사영이 선분 A′B′이고 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overline{A'B'} = 6\sqrt{2}$이고 $\theta = 45^\circ$일 때, 선분 AB의 길이

(2) $\overline{AB} : \overline{A'B'} = 5 : 3$일 때, $\cos\theta$의 값

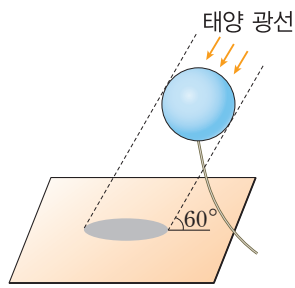
04

오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔에서 선분 AD를 1 : 2로 내분하는 점을 P라고 하자. 직선 BP와 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



05 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10인 구 모양의 풍선이 공중에 떠 있다. 태양 광선이 지면과 60°의 각을 이루면서 비출 때, 지면에 생기는 이 풍선의 그림자의 넓이를 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 구 모양의 풍선의 중심을 지나고 태양 광선과 수직인 평면을 α라고 할 때, 구를 평면 α로 자른 단면의 넓이를 구하시오.

(2) 그림자의 평면 α 위로의 정사영이 (1)에서 구한 단면임을 이용하여 풍선의 그림자의 넓이를 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

도형의 정사영의 뜻을 알고, 도형과 정사영의 관계를 탐구할 수 있다.	☺ ☺ 😐

사각형의 정사영의 넓이 구하기

문제해결 추론

학습 목표 사각형의 넓이와 사각형의 정사영의 넓이 사이의 관계를 파악할 수 있다.

본문 74쪽에서 삼각형의 한 변 BC가 평면 α와 평행한 경우에 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 사이의 관계를 알아보았다.

이제 삼각형 ABC의 어떤 변도 평면 α와 평행하지 않은 경우에도 이 관계가 성립하는지 확인해 보자.

활동 1 **삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하고, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 A′B′C′이라고 하자. 다음은 삼각형 ABC와 삼각형 A′B′C′의 넓이를 각각 S, S'이라고 할 때, 삼각형 ABC의 어떤 변도 평면 α와 평행하지 않은 경우에도 $S'=S\cos\theta$가 성립함을 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.**

세 점 A, B, C의 평면 α 위로의 정사영은 각각 A′, B′, C′이고, $\overline{AA'}>\overline{BB'}>\overline{CC'}$이라고 가정하자.

이때 점 B를 지나고 평면 α와 평행한 평면 α'이 존재한다. 직선 AC는 평면 α'에 포함된 직선이 아니며 평면 α'과 만나므로 직선 AC와 평면 α'의 교점을 D라고 하자.

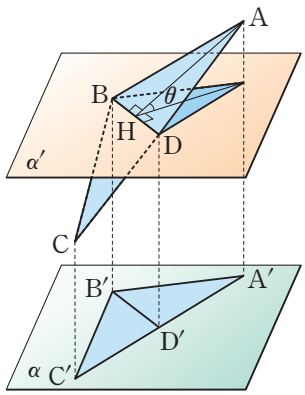
점 D의 평면 α 위로의 정사영을 D′이라고 하면 변 BD는 평면 α와 평행하므로 삼각형 ABD와 삼각형 BCD는 모두 한 변이 평면 α와 평행한 삼각형이다. 따라서

$$\triangle A'B'D'=\triangle ABD\times\square,\ \square=\triangle BCD\times\cos\theta$$

이다. 또,

$$S'=\square+\triangle B'C'D'=\triangle ABD\cos\theta+\triangle BCD\cos\theta$$
$$=(\triangle ABD+\triangle BCD)\cos\theta=\square\times\cos\theta=S\cos\theta$$

이므로 $S'=S\cos\theta$이다.



활동 2 **사각형 PQRS와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$, 사각형 PQRS의 평면 α 위로의 정사영을 사각형 P′Q′R′S′이라고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.**

(1) 삼각형 PQR의 넓이를 S_1이라 하고, 삼각형 PRS의 넓이를 S_2라고 할 때, 활동 1의 결과를 활용하여 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 삼각형 PRS의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_1, S_2, θ를 이용하여 나타내 보자.

(2) 두 사각형 PQRS, P′Q′R′S′의 넓이를 각각 S, S'이라고 할 때, (1)의 결과를 이용하여 $S'=S\cos\theta$임을 설명해 보자.

04 공간좌표

성취기준 좌표공간에서 두 점 사이의 거리와 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.

공간에서 점의 좌표는 어떻게 나타낼까?

생각 열기

환경·지속가능발전

수직 농장은 넓은 재배 면적을 요하는 기존의 농업 방식과 달리 실내에서 수직으로 세운 재배 시스템을 이용하여 효율적으로 공간을 활용해 작물을 재배하는 농장을 말한다. 어느 수직 농장에서는 각종 작물의 위치를 열, 층, 번호로 표시하여 작물을 관리한다고 한다.



❶ B열 4층 7번에 있는 작물의 위치를 (열, 층, 번호)의 순서쌍으로 나타내 보자.

❷ 작물의 위치를 (열, 층, 번호)의 순서쌍으로 표시한다고 할 때, (A, 3, 5)로 표시된 작물의 위치를 말해 보자.

공간에서 점의 좌표

위의 **생각 열기**에서 공간에서의 위치를 숫자 또는 문자의 순서쌍으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

직선에서 점의 위치는 수직선에서 하나의 실수로 나타낼 수 있고, 평면에서 점의 위치는 좌표평면에서 두 실수의 순서쌍으로 나타낼 수 있다.

이제 공간에서 점의 위치를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.



프랑스의 수학자 몽주(Monge, G., 1746~1818)는 화법기하학(畫法幾何學)을 창시하였다.

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 각각의 수직선을 x축, y축, z축이라 하고, 이들 세 개의 축을 좌표축이라고 한다.

이와 같이 좌표축이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

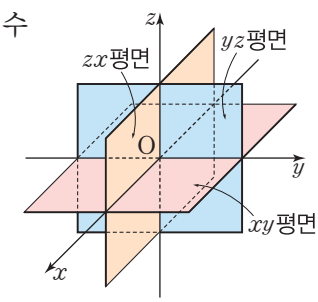
또,

x축과 y축에 의하여 결정되는 평면을 xy평면,

y축과 z축에 의하여 결정되는 평면을 yz평면,

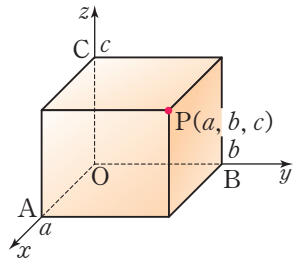
z축과 x축에 의하여 결정되는 평면을 zx평면

이라 하고, 이들을 좌표평면이라고 한다.



오른쪽 그림과 같이 좌표공간의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 x축, y축, z축에 수직인 평면이 이들 축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면 점 P에 대응하는 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 하나로 정해진다.



역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 주어지면 x축, y축, z축 위에서의 좌표가 각각 a, b, c인 점 P가 하나로 정해진다.

따라서 공간의 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일대응이다.

이때 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 좌표라 하고, 점 P의 좌표가 (a, b, c)일 때, 이것을 기호

$$\mathbf{P(}\boldsymbol{a}\mathbf{,}\ \boldsymbol{b}\mathbf{,}\ \boldsymbol{c}\mathbf{)}$$

로 나타낸다. 또, a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다.

좌표공간에서 원점 O의 좌표는 $(0, 0, 0)$이다.

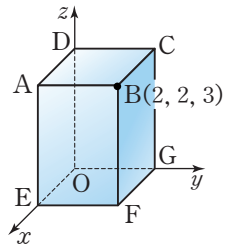
보기 오른쪽 그림과 같이 세 모서리가 좌표축 위에 있는 직육면체에서 꼭짓점 B의 좌표가 $(2, 2, 3)$일 때

(1) 점 B에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 F, C, A라고 하면

$\mathrm{F}(2, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 2, 3)$, $\mathrm{A}(2, 0, 3)$

(2) 점 B에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 E, G, D라고 하면

$\mathrm{E}(2, 0, 0)$, $\mathrm{G}(0, 2, 0)$, $\mathrm{D}(0, 0, 3)$



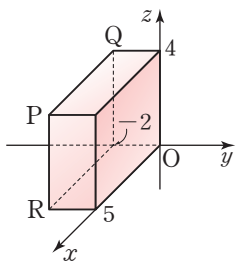
문제 1 **점 $\mathrm{P}(4, 3, -2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.**

(1) 점 P에서 xy평면, yz평면, zx평면에 각각 내린 수선의 발

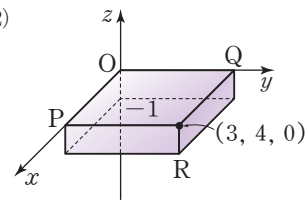
(2) 점 P에서 x축, y축, z축에 각각 내린 수선의 발

문제 2 **다음 그림은 세 모서리가 좌표축 위에 놓여 있는 직육면체이다. 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하시오.**

(1)



(2)



예제 1 좌표공간에서 대칭이동한 점의 좌표 구하기

점 $P(-1, 3, 2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 점 P를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점

(2) 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점

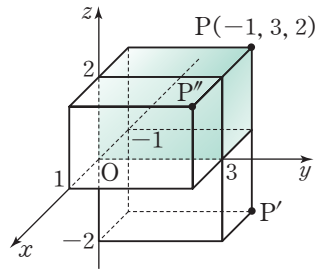
풀이

(1) 점 P를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라고 하자. 점 P′은 점 P와 x좌표, y좌표는 같고 z좌표의 부호는 반대이므로

$P'(-1, 3, -2)$

(2) 점 P를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라고 하자. 점 P″은 점 P와 y좌표, z좌표는 같고 x좌표의 부호는 반대이므로

$P''(1, 3, 2)$



답 (1) $(-1, 3, -2)$ (2) $(1, 3, 2)$

배운 내용 떠올리기

좌표평면 위의 점 (x, y)를

(1) x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, y)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x)

문제 3 **점 $P(3, -1, -4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.**

(1) 점 P를 zx평면에 대하여 대칭이동한 점

(2) 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점

좌표공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 구할까?

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 AB가 세 좌표평면 중 어떤 것과도 평행하지 않을 때, 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 대각선으로 하고 각 면이 한 좌표평면과 평행한 직육면체를 생각하면

$P(x_2, y_2, z_1)$, $Q(x_1, y_2, z_1)$

이므로 이 직육면체의 세 모서리의 길이는

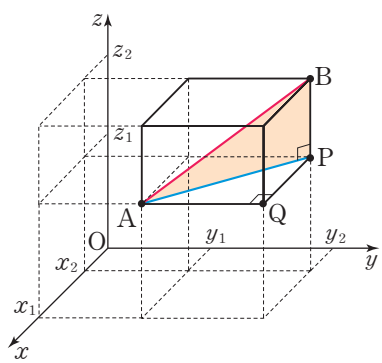
$\overline{PQ}=|x_2-x_1|$, $\overline{AQ}=|y_2-y_1|$,

$\overline{BP}=|z_2-z_1|$

이다. 이때 두 삼각형 AQP, APB는 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{PQ}^2+\overline{AQ}^2+\overline{BP}^2$

이다.



배운 내용 떠올리기

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 사이의 거리는

$|x_2-x_1|$

따라서

$$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.

이 식은 직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면과 평행한 경우에도 성립한다.

배운 내용 떠올리기

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

특히, 원점 $O(0, 0, 0)$과 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$이다.

보기 (1) 두 점 $A(3, 3, 1)$, $B(4, 1, 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-3)^2+(1-3)^2+(3-1)^2}=3$$

(2) 원점 O와 점 $A(3, 6, -6)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}=9$$

문제 4 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(-1, 3, 5)$, $B(-6, -2, 4)$ (2) $O(0, 0, 0)$, $A(2, -3, 6)$

예제 2 좌표공간의 두 점에서 같은 거리에 있는 점의 좌표 구하기

두 점 $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 4, 0)$에서 같은 거리에 있고, x축 위에 있는 점 P의 좌표를 구하시오.

풀이

점 P의 좌표를 $(a, 0, 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$\{a-(-1)\}^2+(0-2)^2+(0-3)^2=(a-0)^2+(0-4)^2+(0-0)^2$$

$$a^2+2a+14=a^2+16$$

$$2a=2, \text{ 즉 } a=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 0, 0)$이다.

답 $(1, 0, 0)$

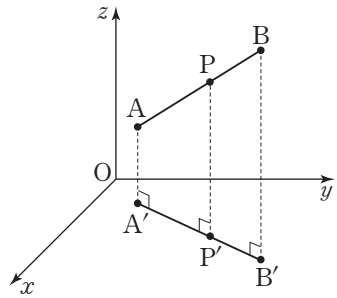


문제 5 두 점 $A(4, 1, -3)$, $B(0, -3, 5)$에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표를 구하시오.

좌표공간에서 선분을 내분하는 점의 좌표는 어떻게 구할까?

생각 열기

오른쪽 그림과 같은 좌표공간의 두 점 A, B에 대하여 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이고, 세 점 A′, B′, P′은 각각 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영이다. $\overline{A'P'}$: $\overline{P'B'}$을 구해 보자.



좌표공간에서 선분의 내분점

위의 **생각 열기**에서 $\overline{AA'} /\!/ \overline{PP'} /\!/ \overline{BB'}$이므로 $\overline{A'P'}$: $\overline{P'B'}=2:1$임을 알 수 있다.

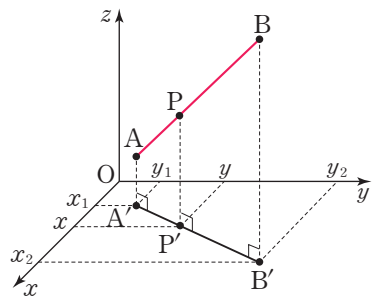
좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 $P(x, y, z)$의 좌표를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라고 하면

$A'(x_1, y_1, 0)$

$B'(x_2, y_2, 0)$

$P'(x, y, 0)$



이고

$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'}=\overline{AP} : \overline{PB}$$
$$=m:n$$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이다.

이때 세 점 A′, B′, P′은 xy평면 위의 점이므로

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다.

같은 방법으로 세 점 A, B, P의 yz평면 또는 zx평면 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

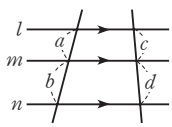
이다.

따라서 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

이다.

배운 내용 떠올리기



$l /\!/ m /\!/ n$이면 $a:b=c:d$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

배운 내용 떠올리기

좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

좌표공간에서 선분의 내분점

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

특히, 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$이다.

예제 3 좌표공간에서 선분을 내분하는 점의 좌표 구하기

두 점 $A(2, 1, 3)$, $B(5, -2, 9)$에 대하여 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점의 좌표를 구하시오.

풀이

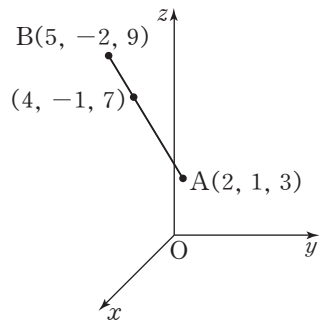
선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y, z)라고 하면

$$x=\frac{2\times5+1\times2}{2+1}=4$$

$$y=\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}=-1$$

$$z=\frac{2\times9+1\times3}{2+1}=7$$

따라서 선분 AB를 $2 : 1$로 내분하는 점의 좌표는 $(4, -1, 7)$이다.



답 $(4, -1, 7)$

문제 6 **두 점 $A(3, -1, 1)$, $B(-2, 9, 6)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.**

(1) 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점

(2) 선분 AB의 중점

문제 7 **두 점 $A(a, 3, -5)$, $B(-2, b, -1)$에 대하여 선분 AB를 $3 : 1$로 내분하는 점이 z축 위에 있을 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.**

예제 4 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표 구하기

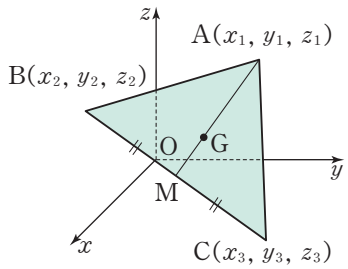
세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

풀이

단계❶ 변 BC의 중점 M의 좌표 구하기

변 BC의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$



단계❷ 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점의 좌표 구하기

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라고 하면 점 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z=\frac{2\times\frac{z_2+z_3}{2}+1\times z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

따라서 무게중심 G의 좌표는

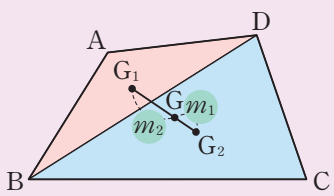
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

답 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

문제 8 **세 점 $A(7, 5, -5)$, $B(5, -1, 2)$, $C(-3, 2, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구하시오.**

도형 속 수학 여행

볼록사각형의 무게중심은 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누어 구할 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 넓이가 m_1인 삼각형 ABD와 넓이가 m_2인 삼각형 BCD로 나누어지는 볼록사각형의 무게중심 G는 두 삼각형 ABD, BCD의 무게중심 G_1, G_2를 연결한 선분을 $m_2 : m_1$로 내분하는 점임이 알려져 있다.



마찬가지 방법으로 볼록오각형의 무게중심은 볼록사각형과 삼각형으로, 볼록n각형은 볼록$(n-1)$각형과 삼각형으로 나누어 그 무게중심을 찾을 수 있다.

출처: 김선희, 김기연, 『수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구』, 대한수학교육학회지, 2005, 340~343쪽

01 학습 목표 되새기기

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=$ □

(2) 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \dfrac{my_2+ny_1}{m+n},\ \square\right)$

02

점 $P(1, 2, 3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 점 P에서 xy평면, yz평면, zx평면에 각각 내린 수선의 발

(2) 점 P에서 x축, y축, z축에 각각 내린 수선의 발

(3) 점 P를 xy평면, yz평면, zx평면, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점

03

두 점 $A(-3, 1, 8)$, $B(2, 6, -2)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점

(2) 선분 AB의 중점

04

두 점 $A(-1, 2, 3)$, $B(6, -2, 1)$과 xy평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

05

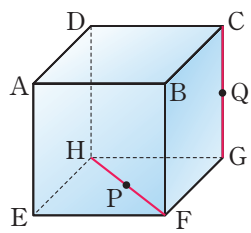
평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점이

$A(2, 4, -2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(2, -1, 3)$

일 때, 꼭짓점 D의 좌표를 구하시오.

06 생각을 키우는 문제

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 10인 정육면체가 있다. 점 P는 점 H를 출발하여 선분 HF를 따라 점 F까지 초당 $\sqrt{2}$의 속력으로 움직이고, 점 Q는 점 C를 출발하여 모서리 CG를 따라 점 G까지 초당 1의 속력으로 움직인다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 정육면체를 꼭짓점 H를 원점, 세 모서리 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향에 오도록 놓을 때, t초 후의 두 점 P, Q의 좌표를 구하시오.

(단, $0\le t\le 10$)

(2) 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리와 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.	☺ ☺ ☺

05 구의 방정식

성취기준 구를 방정식으로 표현할 수 있다.

구의 방정식은 어떻게 구할까?

생각 열기

다음은 반지름의 길이가 1인 반원의 지름을 축으로 하여 1회전 시켜 만든 구이다.



❶ 원의 정의를 말해 보자.

❷ 구의 중심에서 구 위의 임의의 한 점까지의 거리에 대하여 친구들과 이야기해 보자.

구의 방정식

위의 **생각 열기**에서 구의 중심에서 구 위의 임의의 한 점까지의 거리는 항상 일정하다.

이와 같이 공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 구라고 한다. 이때 점 C를 구의 중심, 일정한 거리를 구의 반지름의 길이라고 한다.

이제 좌표공간 위의 한 점 $C(a, b, c)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구를 나타내는 방정식을 구해 보자.

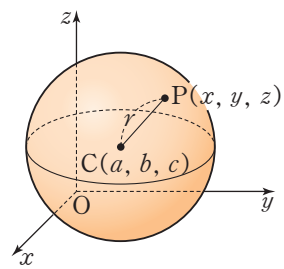
오른쪽 그림과 같이 구 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이다.



역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x, y, z)$에 대하여 $\overline{CP}=r$이므로 점 P는 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 r인 구 위의 점이다.

따라서 방정식 ①을 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 방정식

중심의 좌표가 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=r^2$이다.

보기 (1) 중심의 좌표가 $(2, 3, 4)$이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=25$$

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=1$$

문제 1 다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(-7, 5, 2)$이고 반지름의 길이가 3인 구

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 구

예제 1 구의 방정식 구하기

두 점 $A(4, -1, 6)$, $B(-6, 5, 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.

풀이

단계❶ 구의 중심의 좌표 구하기

두 점 $A(4, -1, 6)$, $B(-6, 5, 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심을 $C(a, b, c)$라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$a=\frac{4+(-6)}{2}=-1,\ b=\frac{-1+5}{2}=2,\ c=\frac{6+2}{2}=4$$

즉, $C(-1, 2, 4)$

단계❷ 구의 반지름의 길이 구하기

구의 반지름의 길이는 중심 C와 구 위의 점 A 사이의 거리이므로

$$\overline{CA}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(-1-2)^2+(6-4)^2}=\sqrt{38}$$

단계❸ 구의 방정식 구하기

따라서 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=38$$

답 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=38$

문제 2 **두 점 $(4, 6, -1)$, $(2, 4, 5)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.**

이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형은 무엇일까?

이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형

구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

이다.

이때 $-2a=A$, $-2b=B$, $-2c=C$, $a^2+b^2+c^2-r^2=D$라고 하면 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

역으로 x, y, z에 대한 이차방정식 ①은

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

로 변형할 수 있다.

$A^2+B^2+C^2-4D=0$이면 방정식 ①은 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$를 나타낸다.
또, $A^2+B^2+C^2-4D<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 실수 x, y, z가 존재하지 않는다.

이때 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 방정식 ①은 중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

보기 이차방정식 $x^2+y^2+z^2-4x+10y+6z+2=0$을 변형하면

$(x-2)^2+(y+5)^2+(z+3)^2=6^2$

이므로 주어진 이차방정식은 중심의 좌표가 $(2, -5, -3)$이고 반지름의 길이가 6인 구를 나타낸다.

문제 3 다음 방정식이 나타내는 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $x^2+y^2+z^2-6x+2y+6z-6=0$

(2) $x^2+y^2+z^2+4x+8z-29=0$

생각 넓히기

문제해결

다음 두 학생의 대화를 읽고, 좌표평면 또는 좌표축에 접하는 구의 방정식을 구해 보자.



1 중심의 좌표가 $(1, 4, 3)$이고, xy평면에 접하는 구

2 중심의 좌표가 $(1, 4, 3)$이고, x축에 접하는 구

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 중심의 좌표가 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

□

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

□

02

다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(1, 3, -5)$이고 반지름의 길이가 2인 구

(2) 중심이 원점이고 점 $(2, -4, 1)$을 지나는 구

(3) 두 점 $A(3, 0, -1)$, $B(1, -2, 7)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구

03

다음 방정식이 나타내는 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

(1) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$

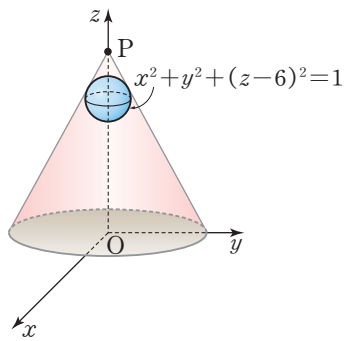
(2) $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-2=0$

04

구 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$가 y축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 구의 중심을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

05 생각을 키우는 문제

다음 그림과 같이 점등식에 전시할 원뿔 형태의 조형물을 만들려고 한다. 조형물의 바닥인 원뿔의 밑면을 xy평면에 놓이도록 좌표공간에 놓으면 이 조형물은 꼭짓점이 $P(0, 0, 8)$이고 구 $x^2+y^2+(z-6)^2=1$에 접하는 선분으로 이루어진 도형이 된다고 한다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 점 P를 지나고 구 $x^2+y^2+(z-6)^2=1$에 접하는 직선이 xy평면과 만나는 점을 Q라고 할 때, 점 Q가 그리는 도형은 어떤 도형인지 말하시오.

(2) (1)에서 구한 도형의 넓이를 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

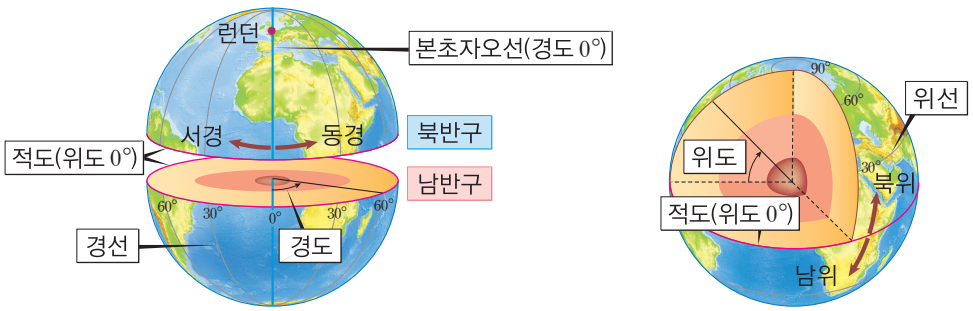
구를 방정식으로 표현할 수 있다.	☺ ☺ 😐

공간을 나타내는 새로운 좌표계 알아보기

학습 목표 공간을 나타내는 새로운 좌표계를 통해 수학의 유용성을 인식할 수 있다.

구는 우리가 발을 딛고 사는 지구와 유사한 모양의 도형이다. 지구가 반지름의 길이가 약 6500 km에 이르는 구와 유사하다는 사실이 밝혀진 뒤, 사람들은 지구 위의 위치를 표시하는 방법을 고안했다.

그 방법 가운데 하나가 경도와 위도를 사용하여 나타내는 경위도좌표계이다. 지구 위의 한 지점의 경도는 영국 그리니치 천문대를 0°로 잡은 본초자오선으로부터 동서 방향으로 잰 각이고, 위도는 적도로부터 남북 방향을 향해 잰 각이다.



예를 들어 우리나라 독도는 동경(본초자오선에서 동쪽으로) 약 132°, 북위(적도에서 북쪽으로) 약 37°인 곳에 위치한다.

일반적으로 구면 위의 점의 위치를 구의 반지름의 길이와 기준선 또는 기준면으로부터 떨어진 각으로 위치를 표시하는 좌표를 구면좌표계라고 한다.

지구 위의 한 지점의 위치를 구면좌표계로 나타낼 때에는 지구의 반지름의 길이와 경도, 위도를 함께 나타내지만 경위도좌표계에서는 지구의 반지름의 길이를 생략하고 경도와 위도만으로 나타낸다.

경위도좌표계를 이용하면 지구의 표면에서 두 지점 사이의 최단 거리를 대략적으로 구해 볼 수 있다. 지구의 반지름의 길이를 6500 km라고 할 때, 경위도좌표계에서 동경 10°, 북위 40°인 지점 A와 동경 10°, 남위 50°인 지점 B 사이의 구면 위에서의 최단 거리는 중심각의 크기가 90°이고 반지름의 길이가 6500 km인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

출처: 『과학동아』, 동아사이언스, 2009. 3., 100~101쪽

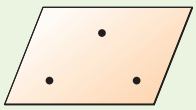
활동 1 **지구의 반지름의 길이를 6500 km라고 할 때, 경위도좌표계를 이용하여 동경 20°, 북위 0°인 지점 P와 서경 40°, 북위 0°인 지점 Q 사이의 구면 위에서의 최단 거리를 구해 보자.**

(단, $\pi=3.14$로 계산하고 반올림하여 일의 자리까지 구한다.)

배운 내용 정리하기

1 평면의 결정 조건

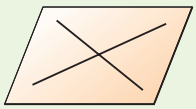
(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점



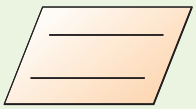
(2) 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점



(3) 한 점에서 만나는 두 직선



(4) 평행한 두 직선



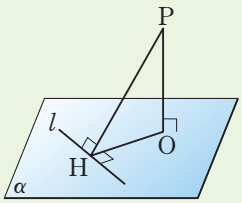
2 삼수선 정리

평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여

(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OH}\perp l$이면
$\overline{PH}\perp l$

(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PH}\perp l$이면
$\overline{OH}\perp l$

(3) $\overline{PH}\perp l$, $\overline{OH}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OH}$이면
$\overline{PO}\perp\alpha$



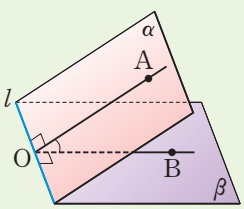
3 이면각

(1) 이면각: 직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형

(2) 이면각의 변: 직선 l

(3) 이면각의 면: 두 반평면 α, β

(4) 이면각의 크기: $\angle AOB$의 크기



4 정사영

(1) 정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′이라 하고, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라고 할 때

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$

(2) 정사영의 넓이

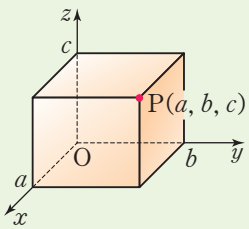
평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라고 할 때

$$S'=S\cos\theta$$

5 공간좌표

(1) 좌표공간: 좌표축이 정해진 공간

(2) 점 P의 공간좌표: 공간의 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)



6 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

7 선분의 내분점

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

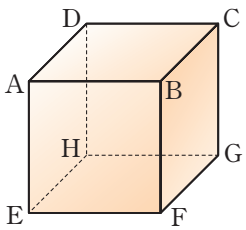
8 구의 방정식

중심의 좌표가 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

01 ●○○

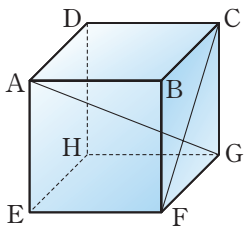
오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 직선 AE와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 a, 직선 BF와 수직인 면의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



02 ●○○

오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 두 직선 AG, CF가 이루는 각의 크기는?

① 30° ② 45°
③ 60° ④ 75°
⑤ 90°



03 ●○○

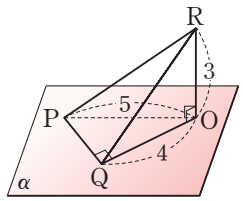
점 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 할 때, 점 Q의 좌표를 구하시오.

04 ●○○

두 점 $\mathrm{A}(2, 2, 1)$, $\mathrm{B}(0, 4, -1)$에서 같은 거리에 있고, x축 위에 있는 점 P의 좌표를 구하시오.

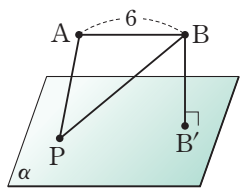
05 ●●○

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 세 점 O, P, Q와 평면 α 위에 있지 않은 점 R에 대하여 $\angle\mathrm{PQO}=\angle\mathrm{POR}=\angle\mathrm{QOR}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=5$, $\overline{\mathrm{OQ}}=4$, $\overline{\mathrm{OR}}=3$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 구하시오.



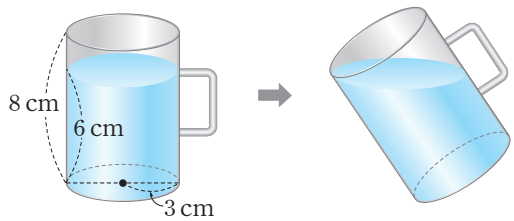
06 ●●○

오른쪽 그림과 같이 평면 α에 평행한 선분 AB에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, 점 P가 평면 α 위를 움직일 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 10이다. 점 B의 평면 α 위로의 정사영을 B′이라고 할 때, 선분 BB′의 길이를 구하시오.



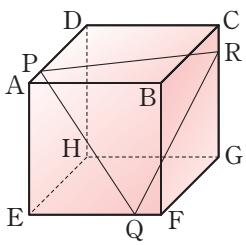
07 ●●○

다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3 cm, 높이가 8 cm인 원기둥 모양의 컵에 물이 6 cm의 높이까지 채워져 있다. 이 컵을 기울여 물을 쏟으려고 할 때, 물이 쏟아지기 직전의 수면의 넓이를 구하시오. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)



08 ●●○

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 10인 정육면체에서 세 모서리 AD, FE, CG를 1 : 4로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하고 삼각형 PQR의 무게중심을 S라고 할 때, 선분 SG의 길이를 구하시오.



09 ●●○

두 점 $A(2, 1, 1)$, $B(-2, 3, 4)$와 yz평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

10 ●●○

점 $P(0, 2, 4)$에서 xy평면 위의 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 PH의 길이는?

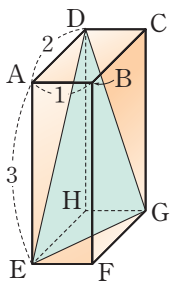
① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

11 ●●○

점 $A(4, -1, -2)$에서 구 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$에 그은 접선의 접점들로 이루어진 도형이 원일 때, 이 원의 둘레의 길이를 구하시오.

12 ●●●

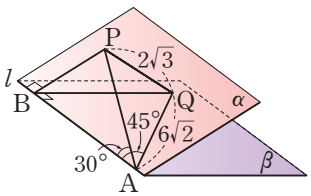
오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=3$일 때, 삼각형 DEG의 넓이를 구하시오.



서술형

13 ●●○

다음 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선 위의 선분 AB를 한 변으로 하는 두 직각삼각형 APB와 AQB가 각각 두 평면 α와 β 위에 놓여 있다. $\angle PAB=30^\circ$, $\angle QAB=45^\circ$이고 $\overline{AQ}=6\sqrt{2}$, $\overline{PQ}=2\sqrt{3}$일 때, 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 구하시오.



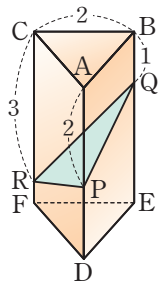
14 ●●○

xy평면 위에 점 A$(2,\ -1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이 있다. 이 원 위의 점 P와 점 Q$(6,\ 3,\ 4)$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

사고력

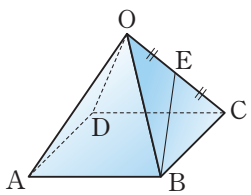
15 ●●●

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 밑면으로 하는 정삼각기둥이 있다. $\overline{AP}=2$, $\overline{BQ}=1$, $\overline{CR}=3$이 되도록 하는 세 점 P, Q, R를 지나는 평면 PQR와 평면 DEF가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



16 ●●●

다음 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔에서 모서리 OC의 중점을 E라 하고, 선분 BE와 밑면 ABCD가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



나의 학습을 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

평면에서 공간으로 차원을 확장하는 것을 이해하고 흥미를 느꼈다.	☺ ☺ ☺
공간도형의 성질을 연역적으로 증명하는 과정에서 논리성을 추구하는 태도를 갖게 되었다.	☺ ☺ ☺
공간도형과 공간좌표의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 절차를 논리적이고 체계적으로 수행하고 반성하였다.	☺ ☺ ☺

수학 프로젝트 활동

공학 도구를 이용하여 정사면체의 성질 탐구하기

학습 목표 공학 도구를 이용하여 정사면체의 성질을 탐구할 수 있다.

의사소통 정보처리

공학 도구를 이용하여 정사면체의 성질을 탐구해 보자.

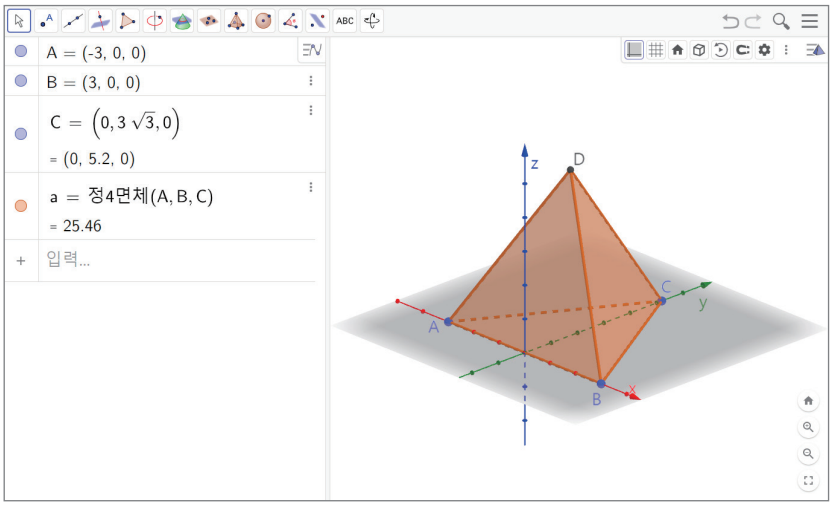
활동 1 **다음 순서에 따라 정사면체를 나타내 보고, 물음에 답해 보자.**

❶ 3차원 계산기를 클릭한다.

❷ 'A(−3, 0, 0)', 'B(3, 0, 0)', 'C(0, 3sqrt(3), 0)'을 입력하면 세 점 A, B, C가 나타난다.

❸ '정4면체(A, B, C)'를 입력하면 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 정사면체가 나타난다.

3차원 계산기에서 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭한 상태로 마우스를 움직이면 다양한 각도에서 도형을 관찰할 수 있다.



'무리수화(X)'는 점 X의 좌표를 무리수 기호($\sqrt{\ }$, π 등)로 나타내는 명령어이다.

(1) '무리수화(D)'를 입력하여 나타난 점 D의 좌표를 말해 보자.

(2) '정8면체(A, B, C)'를 입력하면 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 정팔면체가 나타난다. '무리수화(E)', '무리수화(F)', '무리수화(G)'를 입력하여 나타난 세 점 E, F, G의 좌표를 말해 보자.

(3) (1)과 (2)의 결과를 보고, 평면 ABC와 평면 EFG의 위치 관계에 대하여 말해 보자. 또, 정사면체의 꼭짓점인 점 D의 좌표와 (2)에서 나타난 정팔면체의 한 면인 삼각형 EFG의 관계에 대하여 친구들과 이야기해 보자.

활동 2 공학 도구를 이용하여 활동 1에서 그린 정사면체의 네 꼭짓점 A, B, C, D를 모두 지나는 구를 나타내려고 한다. 다음 순서에 따라 구를 나타내 보고, 물음에 답해 보자.



: 수직선

: 교점

: 구: 중심과 점

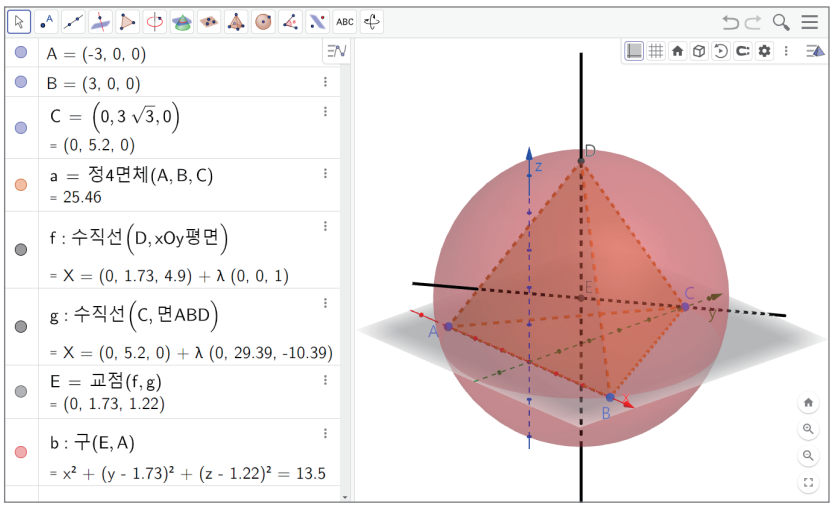
❶ 활동 1의 ❶~❸의 과정을 수행한다.

❷ 을 선택한 후, 점 D와 평면 ABC를 차례대로 선택하면 점 D를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 f가 나타난다.

❸ ❷와 마찬가지로 을 선택한 후, 점 C와 평면 ABD를 차례대로 선택하면 점 C를 지나고 평면 ABD에 수직인 직선 g가 나타난다.

❹ 을 선택한 후, 두 직선 f와 g의 교점을 클릭하면 교점 E의 좌표가 나타난다.

❺ 을 선택한 후, 점 E와 점 A를 순서대로 클릭하면 중심이 점 E이고 반지름이 선분 EA인 구가 나타난다.



(1) '무리수화(E)'를 입력하여 나타난 점 E의 좌표를 말해 보자.

(2) $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}=\overline{ED}$임을 확인해 보자.

(3) '무게중심(면 BCD)'를 입력하면 삼각형 BCD의 무게중심 F가 나타나고, '중점(A, F)'를 입력하면 선분 AF의 중점 G가 나타난다. 선분 GF의 중점의 좌표를 구하여 점 E의 좌표와 비교해 보자.

나의 학습을 스스로 점검해 보고, 프로젝트 활동을 통해 느낀 점을 적어 보자.

평가 항목	자기 평가
공학 도구를 이용하여 정사면체의 성질을 탐구하면서 공간좌표의 유용성을 알게 되었다.	
기하의 개념, 원리, 법칙에 흥미와 관심을 갖고 여러 방법으로 탐구하고 이해하게 되었다.	

프로젝트 활동을 하면서 좋았던 점	프로젝트 활동을 하면서 배운 점

III

벡터

01. 벡터의 뜻과 연산
02. 위치벡터와 벡터의 성분
03. 벡터의 내적
04. 직선의 방정식
05. 평면과 구의 방정식



이 단원에서는...

벡터의 뜻을 알고 벡터의 연산을 학습하고, 위치벡터와 내적의 뜻을 알고 벡터의 내적을 구한다. 또, 벡터를 이용한 직선의 방정식과 평면의 방정식 및 구의 방정식을 배운다.

핵심 아이디어

벡터는 크기와 방향을 갖는 양을 나타내는 도구로, 위치벡터는 좌표평면과 좌표공간에서 도형의 성질을 탐구하는 데 활용된다.

크기와 방향을 함께 고려해야 하는 벡터 개념은 고대 그리스의 유향선분에서도 나타나듯이 오랜 역사를 가진다. 항해하는 배나 항공기의 경로는 자체의 속도와 운행 지역의 해류나 기류에 크게 영향을 받는다. 또, 우주선을 우주의 어떤 궤도에 진입시키거나 지구로 귀환시킬 때에는 우주선의 속력과 방향을 정확히 계산해야 한다. 벡터의 연산을 통해 여러 방향에서 힘이 작용하는 실제 상황에서 물체의 운동과 관련된 문제를 해결할 수 있다. 방향이 있는 양으로 확장된 벡터에 관한 이론은 19세기 말 깁스(Gibbs, J. W., 1839~1903)와 헤비사이드(Heaviside, O., 1850~1925)에 의해 물리학과 공학의 도구로 발전하였다.

출처: 더크 스트릭, 『간추린 수학사』, 장경윤, 강문봉, 박경미 역, 신한출판미디어, 2020, 335쪽



이전에 무엇을 배웠을까?

이 단원에 들어가기 전에



중1

1 다음에서 x를 a, b로 나타내시오.

(1) $5a-2x=-a+2b$

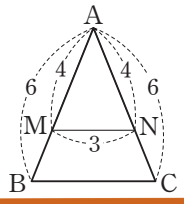
(2) $2(x+a-3b)=4a-2b$



좌변을 x에 대한 식, 우변을 a, b에 대한 식으로 정리해.

중2

3 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AM}=\overline{AN}=4$, $\overline{MN}=3$일 때, 선분 BC의 길이를 구하시오.





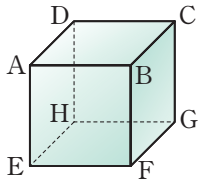
평행선의 성질과 닮음비를 이용해.

중1

2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 다음을 구하시오.

(1) 모서리 AB와 평행한 모서리

(2) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리







서로 다른 두 직선이 평행하거나 꼬인 위치에 있으면 두 직선은 만나지 않아.



Ⅲ 벡터

중3

4 다음을 계산하시오.

(1) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

(2) $\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$

(3) $\tan 30^\circ \div \tan 60^\circ$



기하

6 두 점 $A(1, -2, 0)$, $B(-2, 4, 3)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB의 길이

(2) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표



공통수학2

5 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(1, 1)$, $(2, 4)$를 지나는 직선

(2) 점 $(1, 3)$을 지나고 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$에 수직인 직선



01 벡터의 뜻과 연산

성취기준 벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.

벡터는 무엇일까?

생각 열기

연결

종이비행기를 날릴 때에는 바람의 세기와 바람의 방향을 함께 고려해야 한다. 우리 주변에서 온도나 부피와 같이 크기만으로 그 양을 알 수 있는 것도 있지만, 바람과 같이 크기와 방향을 함께 나타내어야 하는 것도 있다. 다음은 우리 주변에서 측정할 수 있는 양이다.



높이	속도	길이	중력	넓이

❶ 위에서 크기만으로 그 양을 알 수 있는 것을 모두 말해 보자.

❷ 위에서 크기와 방향을 함께 나타내어야 하는 것을 모두 말해 보자.

벡터



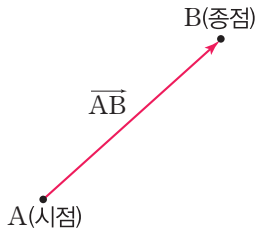
위의 **생각 열기**에서 높이, 길이, 넓이는 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 속도, 중력은 크기와 방향을 함께 나타내어야 그 양을 알 수 있다.

이와 같이 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라고 한다.

벡터를 그림으로 나타낼 때에는 오른쪽 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용한다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향이 주어진 선분 AB를 벡터 AB라고 하며, 이것을 기호

$$\overrightarrow{AB}$$

로 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **종점**이라고 한다.



또, 선분 AB의 길이를 **벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기**라고 하며, 이것을 기호

$$|\overrightarrow{AB}|$$

로 나타낸다.

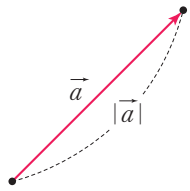
벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 기호

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

로 나타내고, 벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호

$$|\vec{a}|$$

로 나타낸다.



특히, 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다.



한편, 벡터 $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ 등과 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라고 하며, 이것을 기호

$$\vec{0}$$

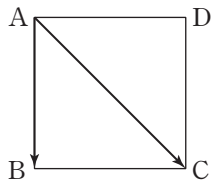
로 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 방향은 생각하지 않는다.

벡터의 정의는 평면과 공간에서 모두 똑같이 적용된다. 그러나 이를 구별할 때에는 평면에서의 벡터를 **평면벡터**, 공간에서의 벡터를 **공간벡터**라고 한다.

보기 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서

(1) 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 시점이 A, 종점이 B인 단위벡터이다.

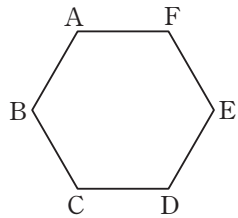
(2) $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



문제 1 **오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형에서 다음을 구하시오.**

(1) $|\overrightarrow{AB}|$

(2) $|\overrightarrow{BE}|$

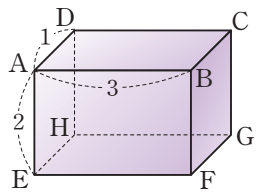


문제 2 **오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=1$, $\overline{AE}=2$인 직육면체에서 다음 벡터의 크기를 구하시오.**

(1) $\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{EG}$

(3) $\overrightarrow{DF}$



서로 같은 벡터

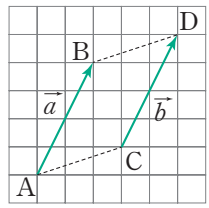
Q 시점의 위치가 달라도 서로 같은 벡터일 수 있나요?

A 벡터는 크기와 방향만으로 정해지므로 한 벡터를 평행이동하여 겹쳐지는 벡터는 모두 같은 벡터입니다.

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{CD}$$

일 때, 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하면 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹쳐지므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 시점의 위치는 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같다.



이와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 방향이 각각 같을 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 같다고 하며, 이것을 기호

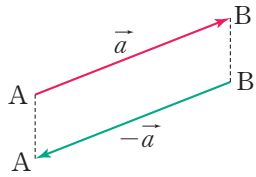
$$\vec{a}=\vec{b}$$

로 나타낸다.

한편, 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}$에 대하여

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$

일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$는 크기는 같지만 방향은 반대이다.



벡터 $\overrightarrow{AB}$에 대하여 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$이고, $|\overrightarrow{BA}|=|-\overrightarrow{AB}|$이다.

이와 같이 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터를 기호

$-\vec{a}$

로 나타낸다.

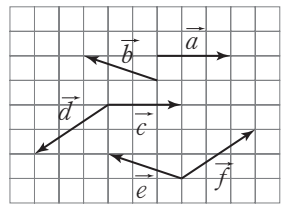
보기 오른쪽 그림에서

(1) 서로 같은 벡터를 찾아 기호로 나타내면

$\vec{a}=\vec{c}$, $\vec{b}=\vec{e}$

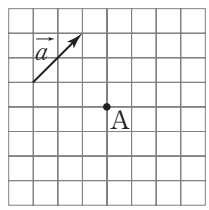
(2) 벡터 $\vec{d}$는 벡터 $\vec{f}$와 크기는 같지만 방향이 반대이므로

$\vec{d}=-\vec{f}$



문제 3 **오른쪽 그림과 같은 점 A와 벡터 $\vec{a}$에 대하여 다음을 만족시키는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 그리시오.**

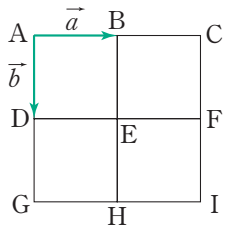
(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ (2) $\overrightarrow{AC}=-\vec{a}$



문제 4 **오른쪽 그림과 같이 합동인 정사각형 네 개로 이루어진 도형이 있다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.**

(1) $\overrightarrow{HI}$ (2) $\overrightarrow{CF}$

(3) $\overrightarrow{HE}$ (4) $\overrightarrow{HG}$

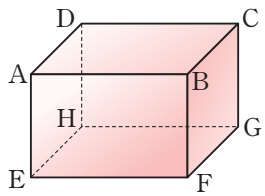


문제 5 **오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 다음 벡터를 모두 구하시오.**

(1) 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터

(2) 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 같은 벡터

(3) 벡터 $\overrightarrow{AH}$와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터

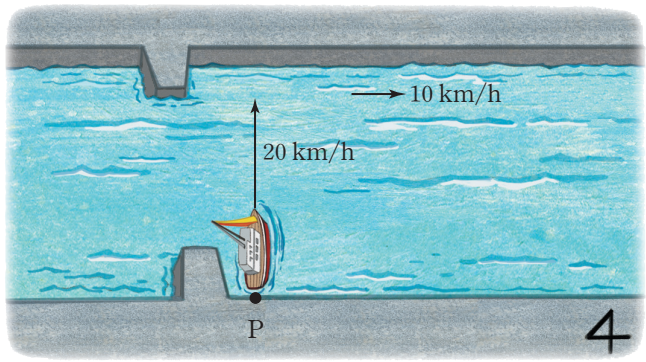


벡터의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

생각 열기

추론

다음 그림과 같이 10 km/h의 속력으로 서쪽에서 동쪽으로 흐르는 강이 있다. 배가 남쪽 강둑의 P 지점에서 출발하여 20 km/h의 속력으로 북쪽을 향하여 나아갈 때, 배가 반대편 강둑에 닿을 때까지 실제로 이동하는 배의 경로를 추측하여 그려 보자.



벡터의 덧셈

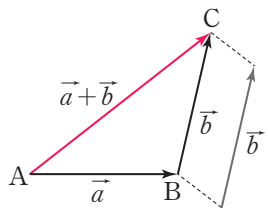
위의 **생각 열기**에서 배가 P 지점에서 20 km/h의 속력으로 북쪽으로 이동하는 동안 강물은 10 km/h의 속력으로 동쪽으로 이동하므로 강물의 속력은 배의 이동 경로에 영향을 미친다.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 덧셈에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC}$$

가 되도록 세 점 A, B, C를 잡는다.



이때 벡터 $\overrightarrow{AC}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라고 하며, 이것을 기호

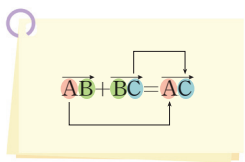
$$\vec{a}+\vec{b}$$

로 나타낸다. 따라서

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

이다.

삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 벡터 $\vec{a}$의 종점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

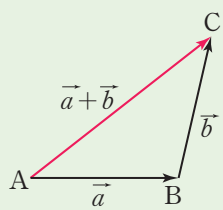


이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 덧셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$일 때

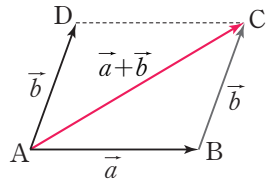
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



한편, 평행사변형을 이용하여 두 벡터의 합을 나타낼 수도 있다.

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$



평행사변형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 구할 때에는 벡터 $\vec{a}$의 시점과 벡터 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

이다.

특히, 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{0}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}\\&=\overrightarrow{AB}\\&=\vec{a}\end{aligned}$$

이다.

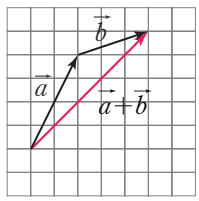
또, $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}+(-\vec{a})&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{AA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

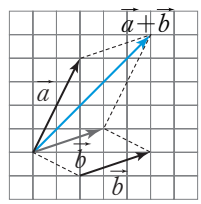
이다.

보기 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

(1)

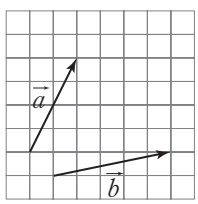


(2)

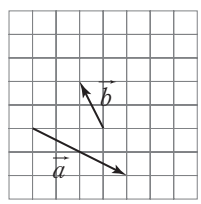


문제 6 **두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$를 그림으로 나타내시오.**

(1)



(2)



벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙

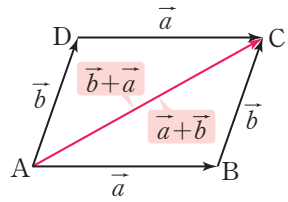
벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC}$$

가 되도록 세 점 A, B, C를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$



이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\\\vec{b}+\vec{a}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

이다. 따라서

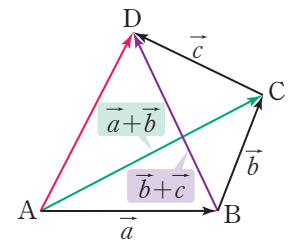
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

또, 오른쪽 그림과 같이 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD}$$

가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡으면



$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\\\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})&=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

1 교환법칙 $\quad\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2 결합법칙 $\quad(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

〈참고〉 벡터의 덧셈에서 결합법칙이 성립하므로 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$와 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$는 괄호를 생략하여 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$로 나타내기도 한다.

예제 1 벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙 이해하기

서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$를 간단히 하시오.

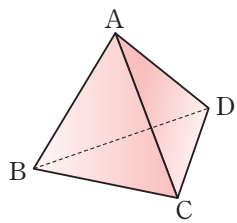
풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

답 $\overrightarrow{AD}$

문제 7 **서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$를 간단히 하시오.**

문제 8 **오른쪽 그림과 같은 사면체에서 벡터 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$를 간단히 하시오.**



벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 뺄셈에 대하여 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라고 하며, 이것을 기호

$$\vec{a}-\vec{b}$$

로 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.

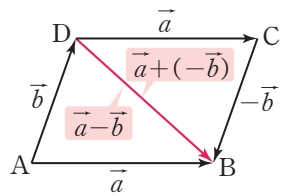
또, 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

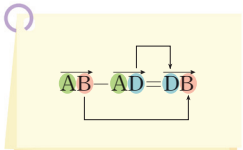
$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD}$$

가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=\vec{a}+(-\vec{b})\\&=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

이다.





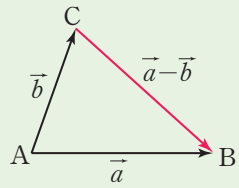
이상을 정리하면 다음과 같다.



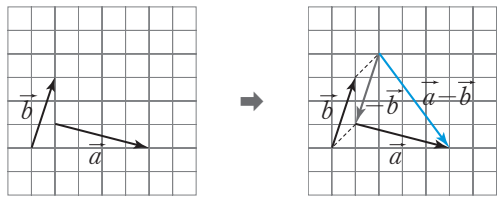
벡터의 뺄셈

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$일 때

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

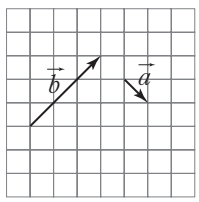


보기 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

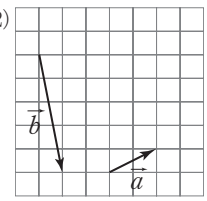


문제 9 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내시오.

(1)

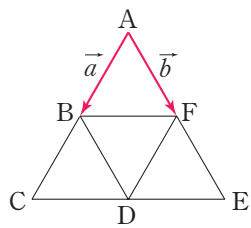


(2)



예제 2 벡터의 연산을 이용하여 평면벡터 나타내기

오른쪽 그림과 같이 서로 합동인 네 개의 정삼각형으로 이루어진 도형이 있다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{DE}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

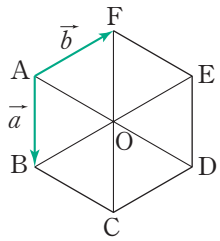


풀이

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}&=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}\\&=(-\overrightarrow{FD})+\overrightarrow{FE}\\&=(-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AF}\\&=-\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

답 $-\vec{a}+\vec{b}$

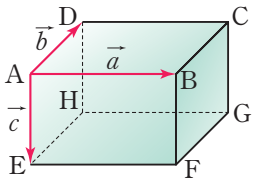
문제 10 오른쪽 그림과 같은 정육각형에서 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{EC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



예제 3 벡터의 연산을 이용하여 공간벡터 나타내기

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

(1) $\overrightarrow{HC}$ (2) $\overrightarrow{DF}$ (3) $\overrightarrow{EC}$



풀이

(1) $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\vec{a}-\vec{c}$

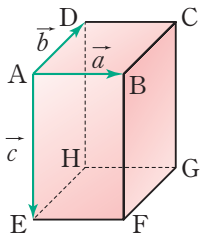
(2) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

답 (1) $\vec{a}-\vec{c}$ (2) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

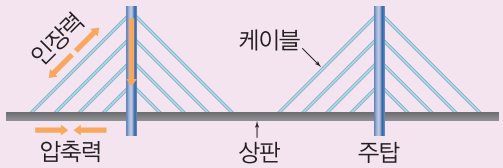
문제 11 오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

(1) $\overrightarrow{CF}$ (2) $\overrightarrow{EB}$ (3) $\overrightarrow{BH}$



생활 속 수학 여행

강 위에 다리를 건설할 때 여러 개의 교각을 설치하기 어려운 곳에는 주탑 외에 다리를 지탱하는 교각을 두지 않는 형태의 사장교를 건설한다. 사장교는 차량이 지나는 상판, 상판을 들어 매는 케이블, 케이블을 지지하는 주탑으로 구성된다. 벡터의 성질을 이용하면 사장교에서 상판과 상판 위를 지나는 차량의 무게, 케이블의 인장력, 상판의 압축력 사이에 있는 힘의 평형을 설명할 수 있다. 인천 대교는 우리나라의 대표적인 사장교이며, 사장교 구간 길이만 보면 세계에서 다섯 손가락 안에 든다.



출처: 오혜정, 『수학 언어로 건축을 읽다』, 지브레인, 2020, 133~135쪽

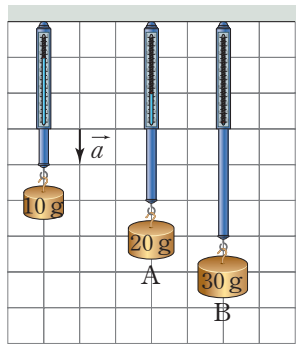
벡터의 실수배는 어떻게 할까?

생각 열기

10 g의 물체를 매달 때마다 일정한 길이가 늘어나는 용수철저울이 있다. 오른쪽 그림은 무게가 각각 20 g, 30 g인 두 물체 A, B를 이 용수철저울에 매달 때, 용수철이 늘어난 모양을 나타낸 것이다. 이 용수철저울에 10 g의 물체를 매달 때, 용수철에 가해지는 힘을 벡터 $\vec{a}$라고 하자.

❶ 두 물체 A, B가 매달린 두 용수철에 가해지는 힘을 벡터 $\vec{a}$를 이용하여 모눈종이에 각각 나타내 보자.

❷ ❶에서 나타낸 두 벡터의 크기를 $|\vec{a}|$와 비교해 보자.



벡터의 실수배

위의 **생각 열기**에서 무게가 각각 20 g, 30 g인 물체가 매달린 두 용수철에 가해지는 힘의 크기는 10 g인 물체를 매달 때와 같은 방향으로 각각 2배, 3배만큼 더 크게 나타난다.

벡터 $\vec{a}$의 실수배에 대하여 알아보자.

영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이것을

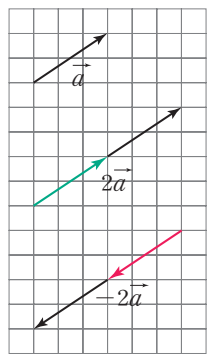
$$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$$

로 나타낸다.

또, $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이것을

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})=-2\vec{a}$$

로 나타낸다.



일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라 하고, 벡터 $k\vec{a}$를 다음과 같이 정의한다.

벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여

1 $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

② $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

③ $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

2 $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

$1\times\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\times\vec{a}=-\vec{a}$

보기 (1) 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 4배인 벡터는 $4\vec{a}$이다.

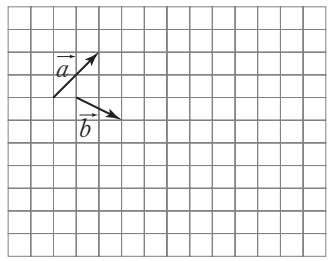
(2) 벡터 $\vec{b}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{b}|$의 $\frac{1}{3}$배인 벡터는 $-\frac{1}{3}\vec{b}$이다.

문제 12 **오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 주어졌을 때, 다음 벡터를 그림으로 나타내시오.**

(1) $3\vec{a}$

(2) $-2\vec{b}$

(3) $3\vec{a}+2\vec{b}$



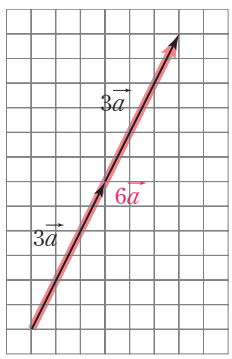
벡터의 실수배에 대한 연산 법칙

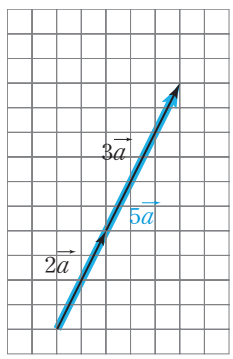
벡터의 실수배에 대한 연산 법칙을 알아보자.

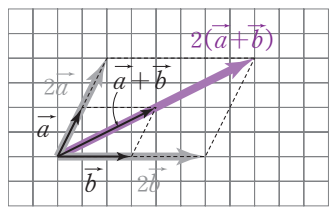
다음 그림에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$2(3\vec{a})=6\vec{a},\ 2\vec{a}+3\vec{a}=5\vec{a},\ 2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$$

임을 알 수 있다.







일반적으로 벡터의 실수배에 대하여 다음과 같은 연산 법칙이 성립한다.

벡터의 실수배에 대한 연산 법칙

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

1 결합법칙 $\quad k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

2 분배법칙 $\quad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a},\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

예제 4 벡터의 연산 법칙을 이용하여 벡터를 간단히 하기

$3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}-4\vec{b})$를 간단히 하시오.

풀이

$$\begin{aligned}3(\vec{a}-2\vec{b})-2(\vec{a}-4\vec{b}) &= 3\vec{a}-6\vec{b}-2\vec{a}+8\vec{b}\\ &= 3\vec{a}-2\vec{a}-6\vec{b}+8\vec{b}\\ &= (3-2)\vec{a}+\{(-6)+8\}\vec{b}\\ &= \vec{a}+2\vec{b}\end{aligned}$$

답 $\vec{a}+2\vec{b}$

문제 13 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $4(\vec{a}+5\vec{b})-3(\vec{a}+6\vec{b})$

(2) $\frac{3}{2}(2\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(4\vec{a}-\vec{b})$

문제 14 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) $\vec{a}+2\vec{x}=3(\vec{x}-2\vec{b})$

(2) $5(\vec{x}-2\vec{a})+4(\vec{b}+2\vec{a})=3\vec{x}$

벡터의 평행은 무엇일까?

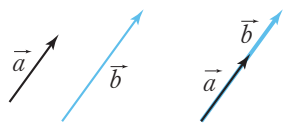
벡터의 평행 벡터의 평행에 대하여 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며, 이것을 기호

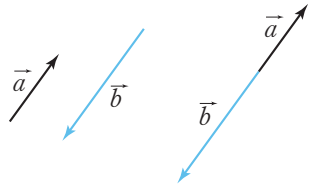
$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

로 나타낸다.





$\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같은 경우



$\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 반대인 경우

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{b}=k\vec{a}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다.

역으로 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행하면 $\vec{b}=k\vec{a}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$$ (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

$\vec{b}\neq\vec{0}$이므로
$\vec{b}=k\vec{a}$에서 $k\neq0$이다.

보기 영벡터가 아닌 두 벡터 $4\vec{a}-2\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$에 대하여

$4\vec{a}-2\vec{b}=2\times2\vec{a}-2\times\vec{b}=2(2\vec{a}-\vec{b})$

이므로 두 벡터 $4\vec{a}-2\vec{b}$와 $2\vec{a}-\vec{b}$는 서로 평행하다.

문제 15 영벡터가 아닌 두 벡터

$$3\vec{a}+2\vec{b},\ \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

가 서로 평행함을 증명하시오.

문제 16 영벡터가 아닌 두 벡터

$$5\vec{a}+4\vec{b},\ k\vec{a}+12\vec{b}$$

가 서로 평행할 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $\vec{a}$, $\vec{b}$는 각각 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

문제 17 세 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$에 대하여

$$\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{y}=\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{z}=\vec{a}+\vec{b}$$

일 때, 두 벡터 $2\vec{x}-\vec{y}$와 $7\vec{z}-\vec{y}$가 서로 평행함을 증명하시오.

(단, $2\vec{x}-\vec{y}$, $7\vec{z}-\vec{y}$는 각각 영벡터가 아니다.)

예제 5 벡터를 이용하여 두 선분의 평행 증명하기

삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 할 때

$$\overline{MN} /\!/ \overline{BC}\text{이고 } \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$

임을 벡터를 이용하여 증명하시오.

증명

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

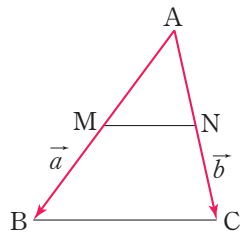
한편, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

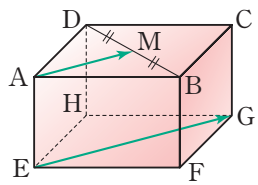
따라서 $\overline{MN} /\!/ \overline{BC}$이고 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이다.



문제 18 **오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 선분 BD의 중점을 M이라고 할 때**

$$\overrightarrow{AM} /\!/ \overrightarrow{EG}$$

임을 증명하시오.



세 점이 한 직선 위에 있을 조건

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\ (k\neq 0)$
⇕
$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$
⇕
세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$$

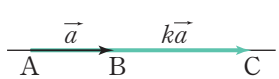
를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면

$$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

역으로 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

$k>0$



$k<0$



예제 6 벡터의 평행을 이용하여 세 점이 한 직선 위에 있음을 증명하기

서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=3\vec{a}-2\vec{b}$

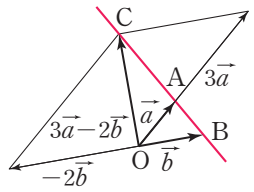
일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 증명하시오.

증명

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\vec{b}-\vec{a}\\\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}=2\vec{a}-2\vec{b}\\&=-2(\vec{b}-\vec{a})\\&=-2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

따라서 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.



문제 19 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{a}-3\vec{b}$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 증명하시오.

문제 20 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-6\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=t\vec{a}+2\vec{b}$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 t의 값을 구하시오.

(단, $\vec{a}$, $\vec{b}$는 각각 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

생각 넓히기

추론 의사소통

다음은 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$의 크기와 방향을 설명한 것이다.

양수 k에 대하여 $|\vec{a}|=k$라고 하면

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{k}\vec{a},\ \left|\frac{1}{k}\vec{a}\right|=\frac{1}{k}|\vec{a}|=1$$

이므로 벡터 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같은 단위벡터이다.

좌표평면 위의 원점 O와 임의의 점 P에 대하여 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$의 종점이 나타내는 도형을 친구들과 이야기해 보자.

스스로 확인하기

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 크기와 방향을 함께 가지는 양을 □(이)라고 한다.

(2) 두 점 A, B에 대하여 점 A에서 점 B로 향하는 방향이 주어진 선분 AB를 벡터 AB라고 하며, 이것을 기호 □(으)로 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 □, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 □(이)라고 한다.

(3) 크기가 1인 벡터를 □(이)라고 한다.

(4) 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 벡터 $\vec{a}$의 □(이)라고 한다.

02

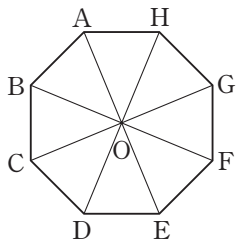
다음을 간단히 하시오.

(1) $2(5\vec{a}-3\vec{b})-4(\vec{a}-\vec{b})$

(2) $\frac{1}{2}(4\vec{a}+3\vec{b})+\frac{1}{2}(6\vec{a}-\vec{b})$

03

오른쪽 그림과 같은 정팔각형에서 네 대각선 AE, BF, CG, DH의 교점을 O라고 할 때, 다음 벡터와 같은 벡터를 모두 구하시오.



(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GF}$

(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{GO}$

04

영벡터가 아닌 두 벡터

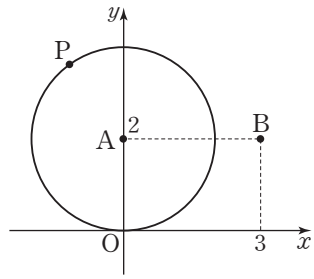
$\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{y}=-4\vec{a}+k\vec{b}$

가 서로 평행할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

(단, $\vec{a}$, $\vec{b}$는 각각 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

05 생각을 키우는 문제

좌표평면에서 두 점 A(0, 2), B(3, 2)와 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)



(1) 다음 □ 안에 알맞은 벡터를 써넣으시오.

> 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 두 벡터의 합으로 나타내면
> $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+$□

(2) $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}|$의 최댓값을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.	☺ ☺ 😐

02 위치벡터와 벡터의 성분

성취기준 위치벡터의 뜻을 알고, 벡터와 좌표를 대응시켜 표현할 수 있다.



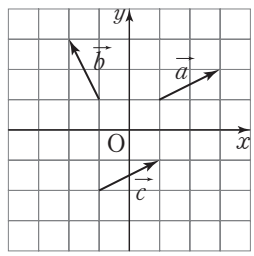
위치벡터는 무엇일까?

생각 열기

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$가 있다.

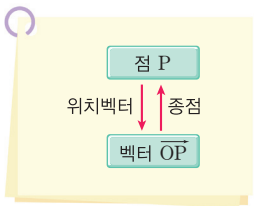
❶ 주어진 세 벡터를 평행이동하여 원점 O를 시점으로 하는 벡터를 그려 보자.

❷ ❶에서 그린 세 벡터 중에서 종점이 일치하는 벡터를 말해 보자.



위치벡터

위의 **생각 열기**에서 서로 같은 두 벡터는 시점이 일치하면 종점도 일치함을 알 수 있다.



평면 또는 공간에서 한 점 O를 시점으로 정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여

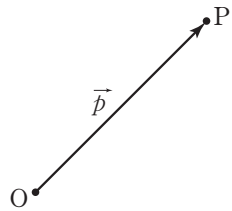
$$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$$

인 점 P가 오직 하나로 정해진다.

역으로 임의의 점 P에 대하여

$$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$$

인 벡터 $\vec{p}$가 오직 하나로 정해진다.



따라서 시점을 한 점 O로 고정하면 점 P와 이 점의 위치를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 일대일 대응이다.

'원점 O에 대한 점 P의 위치벡터'를 간단히 '점 P의 위치벡터'라고 한다.

이와 같이 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 한다. 일반적으로 위치벡터의 시점은 좌표평면 또는 좌표공간의 원점 O로 잡는다.

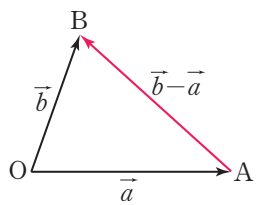
원점 O의 위치벡터는 영벡터 $\vec{0}$이다.

벡터 $\overrightarrow{AB}$를 점 A와 점 B의 위치벡터로 나타내 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$이고

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

이므로 벡터 $\overrightarrow{AB}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

보기 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$
$$=2(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})=-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$$

문제 1 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

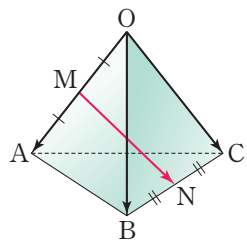
(1) $3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ (2) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$

예제 1 공간에서 벡터를 위치벡터로 나타내기

오른쪽 그림과 같은 정사면체에서 두 모서리 OA, BC의 중점을 각각 M, N이라고 하자.

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$

라고 할 때, $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.



풀이

모서리 OA의 중점이 M이므로

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

모서리 BC의 중점이 N이므로

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

따라서

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

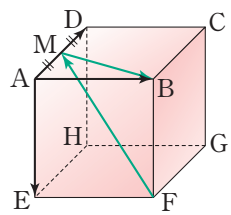
답 $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

문제 2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 모서리 AD의 중점을 M이라고 하자.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$

라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

(1) $\overrightarrow{MB}$ (2) $\overrightarrow{FM}$



이제 선분을 내분하는 점의 위치벡터를 알아보자.

예제 2 선분의 내분점의 위치벡터 구하기

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

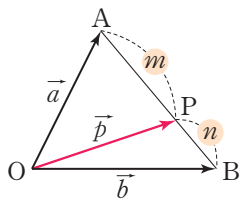
임을 증명하시오.

증명

단계❶ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0$인 실수$)$의 꼴로 나타내기

$|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{BP}|=m:n$이므로 벡터 $\overrightarrow{AP}$를 $\overrightarrow{AB}$로 나타내면

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} \quad \cdots\cdots ①$$



단계❷ 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$로 나타내기

세 점 A, B, P의 위치벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$이므로

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a} \quad \cdots\cdots ③$$

단계❸ 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내기

②, ③을 ①에 대입하면

$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

따라서 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

배운 내용 떠올리기

서로 다른 세 점 A, P, B가 한 직선 위에 있으면

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ $(k\neq0$인 실수$)$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

문제 3 **두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은**

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

임을 증명하시오.

문제 4 **두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음을 만족시키는 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.**

(1) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점

예제 3 삼각형의 무게중심의 위치벡터 구하기

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

임을 증명하시오.

증명

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라고 하면

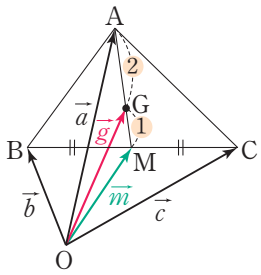
$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면

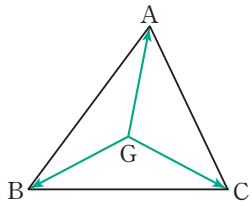
$$\vec{g}=\frac{2\times\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



문제 5 **오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 할 때**

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

임을 증명하시오.



생각 넓히기

문제해결 추론

평면 위의 삼각형 ABC와 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$$

1 두 선분 PA, PB의 길이의 비를 구해 보자.

2 두 삼각형 APC, BPC의 넓이의 비를 구해 보자.

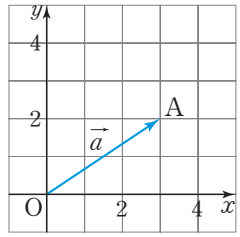
평면벡터의 성분은 무엇일까?

생각 열기

오른쪽 그림과 같은 좌표평면에서 점 A(3, 2)의 위치벡터를 벡터 $\vec{a}$라고 하자.

❶ 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$를 좌표평면에 그려 보자.

❷ 벡터 $\vec{a}$를 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$로 나타내 보자.



평면벡터의 성분

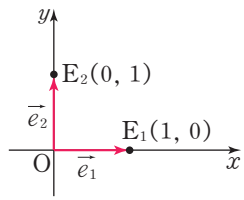
좌표평면에서 위치벡터를 그 종점의 좌표를 이용하여 나타내 보자.

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 두 점 $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$을 각각 종점으로 하는 두 위치벡터를 각각

$$\overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1},\ \overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2}$$

와 같이 나타낸다.

이때 $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$이므로 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$는 모두 단위벡터이다.



$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$
$=(a_1, a_2)$
x성분 y성분

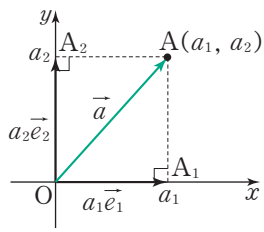
좌표평면 위의 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되도록 점 $A(a_1, a_2)$를 잡고, 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1, 0)$, $A_2(0, a_2)$라고 하면

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$$

이다. 여기서 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$이므로

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.



이때 a_1, a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하고, a_1을 벡터 $\vec{a}$의 x성분, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 y성분이라고 한다. 벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여

$$\vec{a}=(a_1, a_2)$$

와 같이 나타내고, 점 $A(a_1, a_2)$와 그 위치벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$는 일대일로 대응됨을 알 수 있다.

$\vec{a}=\vec{0}$이면 $\vec{a}=(0, 0)$이다.

보기 점 (3, −1)의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때

(1) $\vec{e_1}=(1, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1)$을 이용하여 나타내면

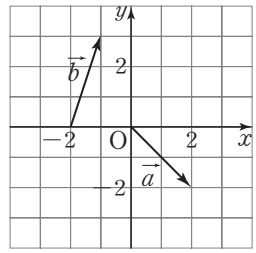
$\vec{a}=3\vec{e_1}-\vec{e_2}$

(2) 벡터 $\vec{a}$를 성분으로 나타내면 $\vec{a}=(3, -1)$

문제 6 오른쪽 그림과 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 $\vec{e_1}=(1, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1)$을 이용하여 나타내시오.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 성분으로 나타내시오.



문제 7 다음에서 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 이용하여 나타낸 벡터는 성분으로, 성분으로 나타낸 벡터는 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 이용하여 나타내시오. (단, $\vec{e_1}=(1, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1)$)

(1) $\vec{a}=5\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ (2) $\vec{b}=7\vec{e_2}-3\vec{e_1}$

(3) $\vec{c}=(-10, 1)$ (4) $\vec{d}=(0, -6)$

성분으로 나타낸 두 평면벡터가 서로 같을 조건과 평면벡터의 크기

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 서로 같으면 두 벡터의 대응하는 성분이 각각 같다. 즉,

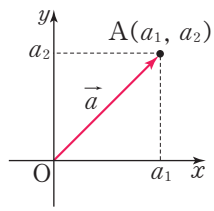
$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

이다.

오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$에서 원점 O와 점 $A(a_1, a_2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다. 즉,

$$|\vec{a}|=\overline{OA}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 두 평면벡터가 서로 같을 조건과 평면벡터의 크기

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때

1 $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$

2 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

보기 (1) $\vec{a}=(3, x)$, $\vec{b}=(y, -1)$일 때, $\vec{a}=\vec{b}$이면

$x=-1$, $y=3$

(2) $\vec{a}=(2, 3)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

문제 8 두 벡터 $\vec{a}=(2m, 4-n)$, $\vec{b}=(3-m, n)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, m, n의 값을 구하시오.

문제 9 다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(3, -4)$ (2) $\vec{b}=(-5, 12)$

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산은 어떻게 할까?

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산

성분으로 나타낸 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 대하여 알아보자.

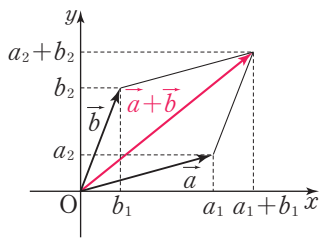
두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$를 $\vec{e_1}=(1, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1)$을 이용하여 나타내면

$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$, $\vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$

이므로 다음이 성립한다.

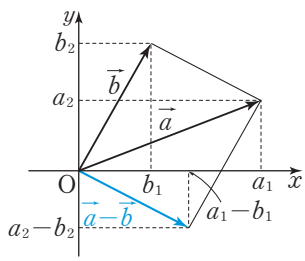
1 벡터의 덧셈

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1+b_1, a_2+b_2)\end{aligned}$$



2 벡터의 뺄셈

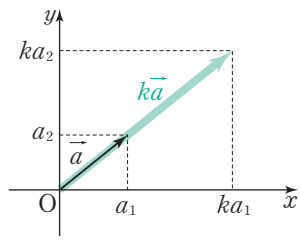
$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1-b_1, a_2-b_2)\end{aligned}$$



3 벡터의 실수배

실수 k에 대하여

$$\begin{aligned}k\vec{a}&=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})\\&=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}\\&=(ka_1, ka_2)\end{aligned}$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

1 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

2 $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$

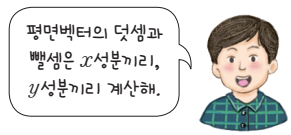
3 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

보기 $\vec{a}=(1, -3)$, $\vec{b}=(1, 2)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1, -3)+(1, 2)$
$=(1+1, -3+2)=(2, -1)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(1, -3)-(1, 2)$
$=(1-1, -3-2)=(0, -5)$

(3) $4\vec{a}=4(1, -3)=(4, -12)$



문제 10 $\vec{a}=(-3, 2)$, $\vec{b}=(2, -1)$**일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.**

(1) $2\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\vec{a}-2\vec{b}$

(3) $2(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+\vec{b})$

(4) $3(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{b}-2\vec{a})$

예제 4 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산 이해하기

세 벡터 $\vec{a}=(3, -1)$, $\vec{b}=(2, 5)$, $\vec{c}=(4, -7)$에 대하여 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 실수 k, l의 값을 구하시오.

풀이

$\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$(4, -7)=k(3, -1)+l(2, 5)$
$=(3k, -k)+(2l, 5l)$
$=(3k+2l, -k+5l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$3k+2l=4$, $-k+5l=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=2$, $l=-1$

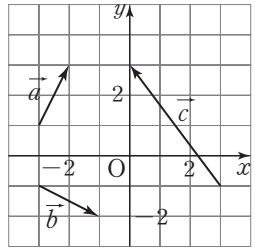
답 $k=2$, $l=-1$

문제 11 **세 벡터 $\vec{a}=(-1, 6)$, $\vec{b}=(3, -2)$, $\vec{c}=(8, 0)$에 대하여 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 실수 k, l의 값을 구하시오.**

문제 12 오른쪽 그림과 같은 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$를 각각 성분으로 나타내시오.

(2) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 실수 k, l의 값을 구하시오.



두 평면벡터가 서로 평행할 조건

성분으로 나타낸 두 평면벡터가 서로 평행할 조건을 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여 두 벡터가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로 두 벡터가 서로 평행할 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow a_1=kb_1,\ a_2=kb_2$$

보기 두 벡터 $\vec{a}=(-3, 6)$, $\vec{b}=(-1, 2)$에 대하여

$\vec{a}=(-3, 6)=3(-1, 2)=3\vec{b}$

이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$는 서로 평행하다.

문제 13 두 벡터 $\vec{a}=(1, k)$, $\vec{b}=(-2, 6)$이 서로 평행할 때, k의 값을 구하시오.

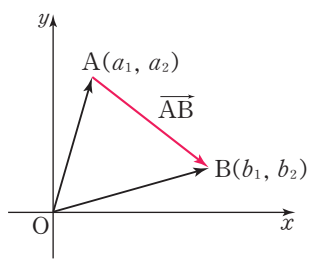
두 점에 의한 평면벡터의 성분과 크기

좌표평면에서 원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해 보자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1, b_2)$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(b_1, b_2)-(a_1, a_2)\\&=(b_1-a_1, b_2-a_2)\end{aligned}$$

이다.



따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 크기

두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여

1 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

2 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

보기 두 점 $A(1, 4)$, $B(-2, 3)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2-1, 3-4)=(-3, -1)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

문제 14 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

(1) $A(0, -2)$, $B(3, 2)$ (2) $A(2, 7)$, $B(4, 5)$

공간벡터의 성분은 무엇일까?

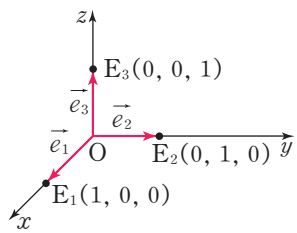
공간벡터의 성분

평면벡터와 같은 방법으로 좌표공간에서 위치벡터를 그 종점의 좌표를 이용하여 나타내 보자.

좌표공간에서 원점 O를 시점으로 하고 세 점 $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$을 각각 종점으로 하는 세 위치벡터를 각각

$$\overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1},\ \overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2},\ \overrightarrow{OE_3}=\vec{e_3}$$

과 같이 나타낸다.



이때 $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=|\vec{e_3}|=1$이므로 세 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$은 모두 단위벡터이다.

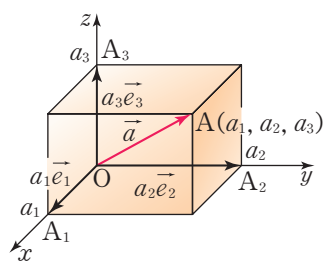
좌표공간 위의 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되도록 점 $A(a_1, a_2, a_3)$을 잡고, 점 A에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 $A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$이라고 하면

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2},\ \overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{e_3}$$

이다. 여기서 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$이므로

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

과 같이 나타낼 수 있다.



$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$
$=(a_1, a_2, a_3)$
x성분 y성분 z성분

이때 a_1, a_2, a_3을 벡터 $\vec{a}$의 성분이라 하고, a_1을 벡터 $\vec{a}$의 x성분, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 y성분, a_3을 벡터 $\vec{a}$의 z성분이라고 한다. 벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$$

과 같이 나타내고, 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$과 그 위치벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$은 일대일로 대응됨을 알 수 있다.

$\vec{a}=\vec{0}$이면 $\vec{a}=(0, 0, 0)$이다.

보기 점 $(1, -2, 3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때

(1) $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$을 이용하여 나타내면
$\vec{a}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+3\vec{e_3}$

(2) 벡터 $\vec{a}$를 성분으로 나타내면 $\vec{a}=(1, -2, 3)$

문제 15 **다음에서 세 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$을 이용하여 나타낸 벡터는 성분으로, 성분으로 나타낸 벡터는 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$을 이용하여 나타내시오. (단, $\vec{e_1}=(1, 0, 0)$, $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$, $\vec{e_3}=(0, 0, 1)$)**

(1) $\vec{a}=10\vec{e_1}-8\vec{e_2}+3\vec{e_3}$

(2) $\vec{b}=-4\vec{e_1}+\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}$

(3) $\vec{c}=(7, -2, 9)$

(4) $\vec{d}=(5, -6, 0)$

성분으로 나타낸 두 공간벡터가 서로 같을 조건과 공간벡터의 크기

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 서로 같으면 두 벡터의 대응하는 성분이 각각 같다. 즉,

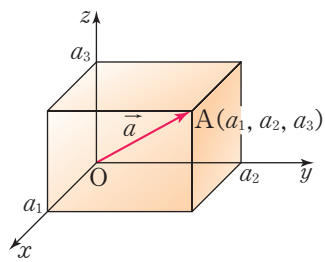
$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$$

이다.

오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$에서 원점 O와 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다. 즉,

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$$

이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 두 공간벡터가 서로 같을 조건과 공간벡터의 크기

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때

1 $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$

2 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$

보기 (1) $\vec{a}=(x, 2, -1)$, $\vec{b}=(3, 2y, z+2)$일 때, $\vec{a}=\vec{b}$이면

$x=3$, $y=1$, $z=-3$

(2) $\vec{a}=(1, 2, 3)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

문제 16 두 벡터 $\vec{a}=(3, -l, m+3)$, $\vec{b}=(l+2, n, 1-m)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, l, m, n의 값을 구하시오.

문제 17 다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(5, -1, 8)$ (2) $\vec{b}=(2, 3, \sqrt{3})$

성분으로 나타낸 공간벡터의 연산은 어떻게 할까?

성분으로 나타낸 공간벡터의 연산

평면벡터에서와 마찬가지로 성분으로 나타낸 공간벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 대하여 다음이 성립한다.

성분으로 나타낸 공간벡터의 연산

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

1 $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

2 $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

3 $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k는 실수이다.)

보기 $\vec{a}=(2, 0, -1)$, $\vec{b}=(1, 3, 1)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(2, 0, -1)+(1, 3, 1)$

$=(2+1, 0+3, -1+1)$

$=(3, 3, 0)$

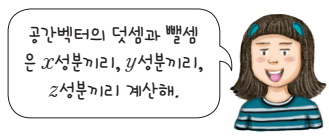
(2) $\vec{a}-\vec{b}=(2, 0, -1)-(1, 3, 1)$

$=(2-1, 0-3, -1-1)$

$=(1, -3, -2)$

(3) $2\vec{a}=2(2, 0, -1)$

$=(4, 0, -2)$



문제 18 $\vec{a}=(-2, 4, 1)$, $\vec{b}=(1, -3, 0)$**일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.**

(1) $2\vec{a}+\vec{b}$ (2) $2(\vec{a}-\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})$

두 공간벡터가 서로 평행할 조건

성분으로 나타낸 두 공간벡터가 서로 평행할 조건을 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 두 벡터가 서로 평행하면 $\vec{a}=k\vec{b}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하므로 두 벡터가 서로 평행할 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=kb_1,\ a_2=kb_2,\ a_3=kb_3$$

보기 두 벡터 $\vec{a}=(8, 2, 4)$, $\vec{b}=(4, 1, 2)$에 대하여

$\vec{a}=(8, 2, 4)=2(4, 1, 2)=2\vec{b}$

이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하다.

문제 19 $\vec{a}=(2, -1, 0)$, $\vec{b}=(-3, 2, 1)$**일 때, 두 벡터** $2\vec{a}+\vec{b}$**와** $\vec{a}+t\vec{b}$**가 서로 평행하도록 하는 실수** t**의 값을 구하시오.**

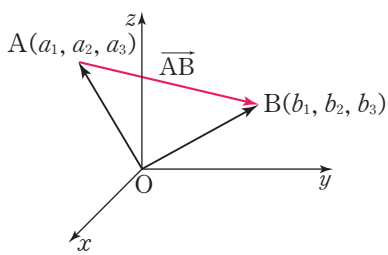
두 점에 의한 공간벡터의 성분과 크기

좌표공간에서 원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해 보자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1, b_2, b_3)$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(b_1, b_2, b_3)-(a_1, a_2, a_3)\\&=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)\end{aligned}$$

이다.



따라서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

공간벡터 $\overrightarrow{AB}$의 성분과 크기

두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

1 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

2 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

보기 두 점 $A(2, 0, 3)$, $B(-2, 1, 0)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2-2, 1-0, 0-3)=(-4, 1, -3)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{26}$

문제 20 다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

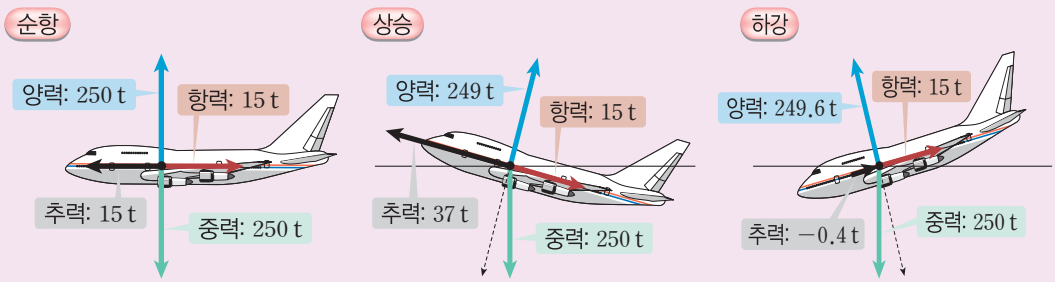
(1) $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 5)$ (2) $A(7, 0, -2)$, $B(3, -5, -5)$



과학 속 수학 여행

항공기가 하늘을 날 때 항공기에는 4가지 힘이 작용한다. 항공기를 지구 방향으로 당기는 힘인 중력, 항공기를 공중으로 띄우고 그 상태를 유지하기 위해 날개에 작용하는 힘인 양력, 항공기의 진행 방향과 반대로 공기를 힘차게 내보냄으로써 항공기를 앞으로 나아가게 하는 힘인 추력, 공기의 저항력인 항력의 4가지 힘이 작용하는데 이 4가지 힘의 합에 의해 항공기가 순항, 상승, 하강을 하게 된다.

항공기에 작용하는 이러한 힘을 알아야 항공기를 제작하거나 운항할 수 있다.



출처: 나카무라 간지, 『알기 쉬운 항공역학』, 권재상 역, 북스힐, 2017, 14쪽, 79쪽

스스로 확인하기

02. 위치벡터와 벡터의 성분
정답 및 해설 191쪽

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 □(이)라고 한다.

(2) 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

① $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=$□, $a_2=$□

② $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+$□$}$

(3) 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여

① $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,$ □$)$

② $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{$□$+(b_2-a_2)^2}$

(4) 두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

① $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=$□, $a_2=$□, $a_3=$□

② $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+$□$}$

(5) 두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

① $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2,$ □$)$

② $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+$□$}$

02

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하고, 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

03

두 벡터 $\vec{a}=(3, x+y, 5-z)$, $\vec{b}=(2-x, 1, y)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, $|\vec{a}|^2$의 값을 구하시오.

04

세 점 $A(2, 3, -1)$, $B(-1, 1, 4)$, $C(7, 2, 5)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$를 만족시키는 점 D의 좌표를 구하시오.

05 생각을 키우는 문제

어느 탐험가가 기지로 돌아가려면 북쪽으로 6 km를 이동하여야 하는데, 심한 눈보라를 만나 주위를 분간할 수 없는 상황에서 어느 한 방향을 향해 이동하였다. 눈보라가 걷힌 후에 확인하니 현재의 위치는 처음 출발한 위치에서 동북쪽 45° 방향으로 $4\sqrt{2}$ km를 이동한 곳이었다. 다음 물음에 답하시오. (단, 처음 출발 위치의 동쪽을 x축의 양의 방향, 북쪽을 y축의 양의 방향으로 생각한다.)

(1) 탐험가의 처음 출발 위치를 (0, 0)이라고 할 때, 기지의 위치와 탐험가의 현재 위치를 좌표로 나타내시오.

(2) 기지로 돌아가기 위해 탐험가가 이동해야 하는 경로를 $\vec{p}$라고 할 때, 벡터 $\vec{p}$를 성분으로 나타내시오.

(3) 탐험가의 현재 위치에서 기지까지의 거리를 구하시오.



나의 학습을 스스로 점검해 보자.

위치벡터의 뜻을 알고, 벡터와 좌표를 대응시켜 표현할 수 있다.	☺ ☺ 😐

공학 도구를 이용하여 위치벡터 나타내기

정보처리

학습 목표 공학 도구를 이용하여 위치벡터가 나타내는 도형을 파악할 수 있다.

좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$와 실수 m에 대하여

$$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$$

를 만족시키는 점 C가 나타내는 도형을 공학 도구를 이용하여 확인해 보자.

: 벡터

: 점

: 슬라이더

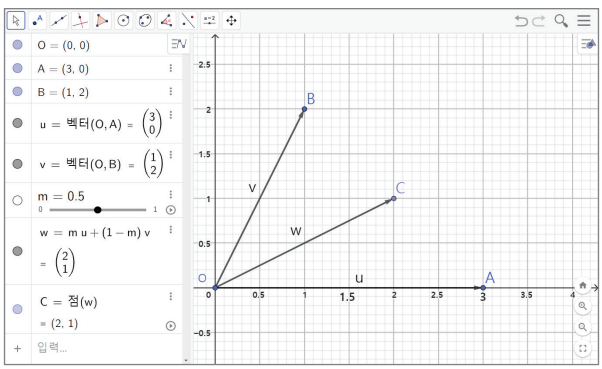
❶ 'O(0, 0)', 'A(3, 0)', 'B(1, 2)'를 차례대로 입력하면 세 점 O, A, B가 나타난다.

❷ 를 선택하고 시작점과 끝 점을 차례로 선택하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 나타내면, 각각 벡터 u, v로 표시된다.

❸ 를 선택하고 이름을 'm', 최솟값을 '0', 최댓값을 '1'로 입력한 후, m의 값을 0.5로 둔다.

❹ 'm*u+(1–m)*v'를 입력하면 벡터 w로 표시되고, 이것은 벡터 $m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$를 나타낸다.

❺ 을 선택하고 ❹에서 나타낸 벡터의 끝을 선택하여 점 C를 나타내고, 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭한 후 '자취 보이기'를 선택한다.



활동 1 m의 슬라이더를 움직여서 점 C가 나타내는 도형을 그려 보고, 나타난 도형을 말해 보자.

활동 2 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$와 두 실수 m, n에 대하여

$$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (0\le m\le 1,\ 0\le n\le 1)$$

를 만족시키는 점 C가 나타내는 도형을 공학 도구를 이용하여 그려 보고, 나타난 도형을 말해 보자.



03 벡터의 내적

성취기준 내적의 뜻을 알고, 두 벡터의 내적을 구할 수 있다.

벡터의 내적은 무엇일까?

생각 열기

연결

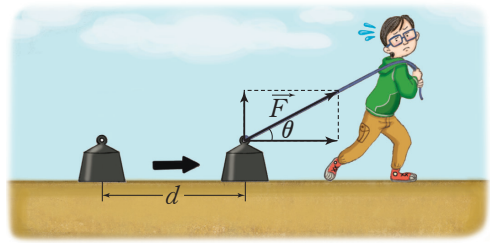
물체에 힘을 작용하여 물체를 이동시켰을 때, 힘이 물체에 한 일의 양은 다음과 같이 정의한다.

(일의 양)=(물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기)×(물체의 이동 거리)

오른쪽 그림과 같이 지면 위에 놓여 있는 물체에 지면과 이루는 각의 크기가 θ인 힘 $\vec{F}$를 가하여 물체를 거리 d만큼 이동하였다.

❶ 물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기를 θ와 $\vec{F}$를 이용하여 나타내 보자.

❷ 힘이 물체에 한 일의 양을 θ, $\vec{F}$, d를 이용하여 나타내 보자.



벡터의 내적

위의 **생각 열기**에서 물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기는 $|\vec{F}|\cos\theta$이므로 힘이 물체에 한 일의 양은 $|\vec{F}|\cos\theta\times d$이다.

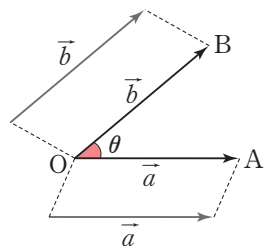
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$

가 되도록 세 점 O, A, B를 잡을 때

$\angle AOB=\theta$ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



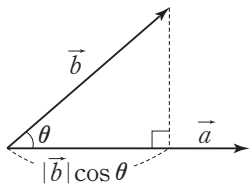
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**을 기호

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

로 나타내고, θ의 크기에 따라 다음과 같이 정의한다.

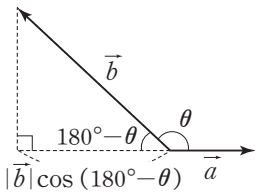
(i) $0^\circ\le\theta\le90^\circ$일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$



(ii) $90^\circ<\theta\le180^\circ$일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$



두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 실수이다.

또, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

1 $0^\circ\le\theta\le90^\circ$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2 $90^\circ<\theta\le180^\circ$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$

보기 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

(1) $\theta=30^\circ$일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30^\circ=1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(2) $\theta=120^\circ$일 때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-120^\circ)=-1\times2\times\frac{1}{2}=-1$

문제 1 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구하시오.

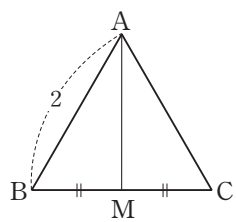
(1) 45° (2) 90° (3) 150°

예제 1 평면도형에서 벡터의 내적 구하기

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$



풀이

(1) $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{3}$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$이 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|\cos30^\circ$

$=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{CA}|=2$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각의 크기가 120°이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos(180^\circ-120^\circ)$

$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos60^\circ$

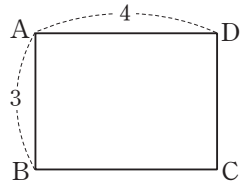
$=-2\times2\times\frac{1}{2}=-2$

답 (1) 3 (2) -2

문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$인 직사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$

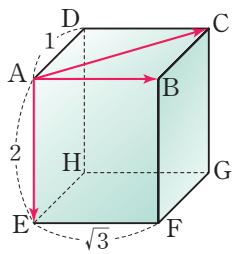


예제 2 공간도형에서 벡터의 내적 구하기

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=1$, $\overline{AE}=2$, $\overline{EF}=\sqrt{3}$인 직육면체에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$



풀이

(1) 선분 AC는 $\overline{AB}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=1$인 직각삼각형 ABC의 빗변이므로

$|\overrightarrow{AC}|=2$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ$

$=\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

직각삼각형 ABC에서
$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=2:1:\sqrt{3}$
이므로 $\angle CAB=30^\circ$

(2) 직선 AE가 평면 ABCD와 수직이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.

따라서

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\cos 90^\circ$

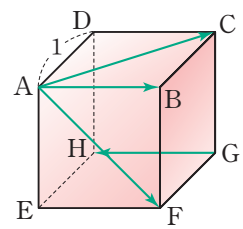
$=2\times 2\times 0=0$

답 (1) 3 (2) 0

문제 3 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH}$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$



성분으로 나타낸 벡터의 내적은 어떻게 구할까?

성분으로 나타낸 벡터의 내적

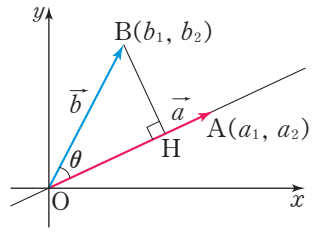
벡터의 성분을 이용하여 평면벡터의 내적을 나타내 보자.

영벡터가 아닌 두 평면벡터

$$\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2),\ \overrightarrow{OB}=(b_1, b_2)$$

가 이루는 각의 크기를 θ라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자.

(i) $0^\circ<\theta<90^\circ$일 때



점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(ka_1, ka_2)$ $(k>0)$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OH}|=|\overrightarrow{OA}|\times k|\overrightarrow{OA}|\\&=k|\overrightarrow{OA}|^2\\&=k(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})\qquad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

이다. 한편, 직각삼각형 BOH에서

$$|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OH}|^2+|\overrightarrow{HB}|^2$$

이고, $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}=(b_1-ka_1, b_2-ka_2)$이므로

$$b_1^{\,2}+b_2^{\,2}=(k^2a_1^{\,2}+k^2a_2^{\,2})+\{(b_1-ka_1)^2+(b_2-ka_2)^2\}$$

$$(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})k^2=(a_1b_1+a_2b_2)k$$

이다. 이 식을 정리하면

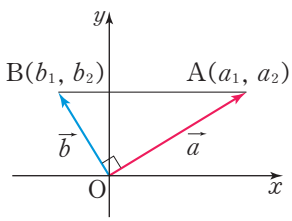
$$k=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$$

이므로 이 식을 ①에 대입하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이다.

(ii) $\theta=90^\circ$일 때



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ가 90°이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0\qquad\cdots\cdots\ ②$$

한편, 직각삼각형 BOA에서

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$$

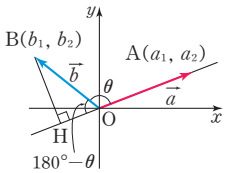
이므로

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})+(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})$$

이다. 이 식을 정리하면

$$a_1b_1+a_2b_2=0\qquad\cdots\cdots\ ③$$

이므로 ②, ③에 의하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$이다.



(iii) $90^\circ<\theta<180^\circ$, $\theta=0^\circ$, $\theta=180^\circ$일 때에도 마찬가지로 정리하면 다음을 얻는다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

또, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$가 성립한다.

한편, 마찬가지 방법으로 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$이 성립함을 확인할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 벡터의 내적

1 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

2 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

〈참고〉 (1) 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2={a_1}^2+{a_2}^2=|\vec{a}|^2$

(2) 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2=|\vec{a}|^2$

보기 (1) $\vec{a}=(1, 3)$, $\vec{b}=(-2, 1)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+3\times1=1$

(2) $\vec{a}=(0, 1, -1)$, $\vec{b}=(3, 2, -2)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times3+1\times2+(-1)\times(-2)=4$

문제 4 다음 두 벡터의 내적을 구하시오.

(1) $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(-1, 4)$

(2) $\vec{a}=(1, 2, 1)$, $\vec{b}=(-3, 1, 0)$

벡터의 내적에는 어떤 성질이 있을까?

벡터의 내적의 성질

벡터의 내적의 성질을 알아보자.

세 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$, $\vec{c}=(c_1, c_2)$와 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})&=(a_1, a_2)\cdot(b_1+c_1, b_2+c_2)\\&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)\\&=(a_1b_1+a_1c_1)+(a_2b_2+a_2c_2)\\&=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

같은 방법으로 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$도 성립한다.

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=(ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$=(ka_1)b_1+(ka_2)b_2$

$=k(a_1b_1+a_2b_2)$

$=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

같은 방법으로 $\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$도 성립한다.

마찬가지 방법으로 공간벡터에 대하여 위의 성질이 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (단, k는 실수이다.)

예제 3 벡터의 내적의 성질 이해하기

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

증명

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

문제 5 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

예제 4 벡터의 내적의 성질 활용하기

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|$의 값을 구하시오.

풀이

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$이고, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\times 2\times\frac{1}{2}=1$이므로

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4\times 1^2-4\times 1+2^2=4$$

따라서 $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{4}=2$이다.

답 2

문제 6 $|\vec{a}|=\frac{2}{3}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 45°일 때, $|3\vec{a}+\vec{b}|$의 값을 구하시오.

문제 7 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (2) $|\vec{a}-\vec{b}|$

두 벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까?

두 벡터가 이루는 각의 크기

벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구해 보자.

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le 180^\circ)$라고 하자.

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$이면 $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$이므로 내적의 정의에 의하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다. 따라서

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

이다.

(ii) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이면 $90^\circ<\theta\le 180^\circ$이므로 내적의 정의에 의하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$$

이다. 따라서

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

이다.

마찬가지 방법으로 영벡터가 아닌 두 공간벡터가 이루는 각의 크기를 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 벡터가 이루는 각의 크기

1 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라고 할 때

① $\vec{a}\cdot\vec{b} \ge 0$이면 $\quad \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$

② $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$이면 $\quad \cos(180^\circ-\theta)=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$

2 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라고 할 때

① $\vec{a}\cdot\vec{b} \ge 0$이면 $\quad \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}$

② $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$이면 $\quad \cos(180^\circ-\theta)=-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$=-\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}$$

예제 5 두 벡터가 이루는 각의 크기 구하기

다음 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(1, 3)$ (2) $\vec{a}=(1, 2, 1)$, $\vec{b}=(-2, -1, 1)$

풀이

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times3=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 각의 크기는 45°이다.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times(-1)+1\times1=-3$

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(90^\circ < \theta \le 180^\circ)$라고 하면

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-3}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}$$

$$=-\frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $180^\circ-\theta=60^\circ$이므로 구하는 각의 크기는 120°이다.

답 (1) 45° (2) 120°

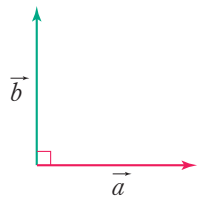
문제 8 다음 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(1, \sqrt{3})$, $\vec{b}=(0, 7)$ (2) $\vec{a}=(1, 1, 0)$, $\vec{b}=(-1, -1, \sqrt{2})$

두 벡터의 수직 조건과 평행 조건

두 벡터가 서로 수직일 조건과 평행할 조건을 알아보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 90°일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 수직이라고 하며, 이것을 기호 $\vec{a}\perp\vec{b}$로 나타낸다.

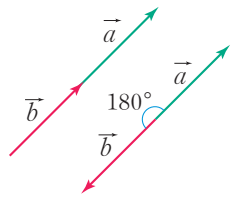


두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90^\circ=0$$

이다. 즉, $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이고, 그 역도 성립한다.

한편, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 0° 또는 180°이다.



$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같으면 $\theta=0^\circ$

(i) $\theta=0^\circ$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 0^\circ=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 반대이면 $\theta=180^\circ$

(ii) $\theta=180^\circ$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ-180^\circ)$$
$$=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

(i), (ii)에서 $\vec{a}\parallel\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 벡터의 수직 조건과 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

1 수직 조건: $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2 평행 조건: $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

보기 (1) 두 벡터 $\vec{a}=(-3, 2)$, $\vec{b}=(-4, -6)$에 대하여

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\times(-4)+2\times(-6)=0$

이므로 $\vec{a}\perp\vec{b}$이다.

(2) 두 벡터 $\vec{c}=(1, 3)$, $\vec{d}=(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$에 대하여

$\vec{c}\cdot\vec{d}=1\times(-\sqrt{2})+3\times(-3\sqrt{2})=-10\sqrt{2}$

$|\vec{c}|\,|\vec{d}|=\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-3\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}\sqrt{20}=10\sqrt{2}$

에서 $\vec{c}\cdot\vec{d}=-|\vec{c}|\,|\vec{d}|$이므로 $\vec{c}\parallel\vec{d}$이다.

문제 9 두 벡터 $\vec{a}=(1, 4, -1)$, $\vec{b}=(x-1, x+5, -x+1)$에 대하여 다음을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ (2) $\vec{a}/\!/\vec{b}$

예제 6 두 벡터의 수직 조건 활용하기

벡터 $\vec{a}=(2, -1)$과 수직이고 크기가 $\sqrt{5}$인 벡터 $\vec{b}$를 모두 구하시오.

풀이

단계❶ 벡터의 수직 조건과 벡터의 크기를 이용하여 연립방정식 세우기

$\vec{b}=(x, y)$라고 하면 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x-y=0 \quad \cdots\cdots ①$$

또, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$에서 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$이므로

$$x^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ②$$

단계❷ 연립방정식 풀기

①, ②를 연립하여 풀면

$$x=1, y=2 \text{ 또는 } x=-1, y=-2$$

단계❸ 벡터 $\vec{b}$ 구하기

따라서 구하는 벡터 $\vec{b}$는

$$\vec{b}=(1, 2) \text{ 또는 } \vec{b}=(-1, -2)$$

답 $\vec{b}=(1, 2)$ 또는 $\vec{b}=(-1, -2)$

문제 10 벡터 $\vec{a}=(3, -4)$와 수직이고 크기가 10인 벡터 $\vec{b}$를 모두 구하시오.

문제 11 세 벡터 $\vec{a}=(x, y, 4)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(3, 2, -3)$에 대하여

$$\vec{a}\perp\vec{b},\ \vec{a}\perp\vec{c}$$

일 때, x, y의 값을 구하시오.

생각 넓히기

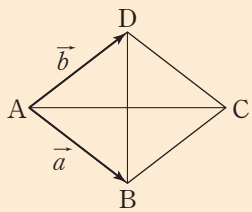
문제해결 추론



오른쪽 그림과 같은 마름모 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, 두 대각선 AC, BD가 서로 수직임을 벡터를 이용하여 증명하려고 한다.

1 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타내 보자.

2 벡터의 내적을 이용하여 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$임을 증명해 보자.



01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

① $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

② $90^\circ < \theta \le 180^\circ$일 때,

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ □

(2) ① 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

② 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ □

(3) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} =$ □

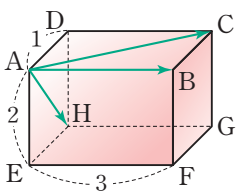
② $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm$ □

02

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=1$, $\overline{AE}=2$, $\overline{EF}=3$인 직육면체에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



03

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 120°일 때, $|2\vec{a}-3\vec{b}|$의 값을 구하시오.

04

두 벡터 $\vec{a}=\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, $\vec{b}=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

05

두 벡터 $\vec{a}=(2, 1, 0)$, $\vec{b}=(0, 1, 2)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $\vec{a}$와 $\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 수직이다.

(2) $\vec{a}$와 $\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하다.

06 생각을 키우는 문제

직선 $y=-2x$ 위를 움직이는 점 $P(p, q)$와 두 점 $A(2, 4)$, $B(3, 1)$에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$를 성분으로 나타내시오.

(2) $q=-2p$임을 이용하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최솟값을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

내적의 뜻을 알고, 두 벡터의 내적을 구할 수 있다.	😀 🙂 😐

역사 속 수학 여행

다음은 수학의 역사 속에 등장하는 벡터에 대한 이야기를 모아 만든 신문이다.

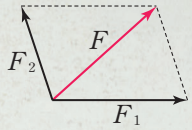
벡터 신문

역사 속으로



뉴턴, 『프린키피아』에서 두 힘을 더하는 평행사변형법을 설명하다.

영국의 수학자 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 1687년 출판한 그의 저서 『프린키피아』에서 두 힘을 평행사변형법으로 더한다는 설명을 했다. 물론 벡터의 개념을 명확히 구성한 것은 아니지만 이 방법은 19세기 후반에 벡터의 덧셈으로 정식화되었다.



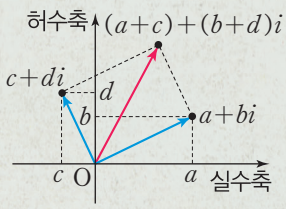


가우스, 복소수를 좌표평면 위의 점으로 나타내고 그 연산을 벡터의 연산과 유사한 방식으로 연산하는 내용을 담은 논문을 출판하다.

독일의 수학자 가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 복소수 $a+bi$를 실수축과 허수축으로 이루어진 좌표평면 위의 점 (a, b)로 나타내고, 그 연산을 벡터의 연산과 유사한 방식으로 연산하는 내용을 담은 논문을 1831년에 출판했다. 그가 논문에 쓴 두 복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$의 합 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$를 구하는 방법이 두 벡터 $\vec{v_1}=(a, b)$, $\vec{v_2}=(c, d)$의 합

$$\vec{v_1}+\vec{v_2}=(a+c, b+d)$$

를 구하는 방법과 유사하였다.



한 줄 뉴스



아일랜드의 수학자 해밀턴(Hamilton, W. R., 1805~1865), 벡터와 스칼라라는 용어를 제시하였다.

영국의 수학자 맥스웰(Maxwell, J. C., 1831~1879), 여러 가지 물리량을 벡터와 스칼라로 분류하였다.





독일의 수학자 그라스만(Grassmann, H. G., 1809~1877), 벡터의 내적을 정의하였다.

출처: 고중숙, 『수학 바로 보기』, 텔림, 2013, 553~612쪽

04 직선의 방정식

성취기준 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.

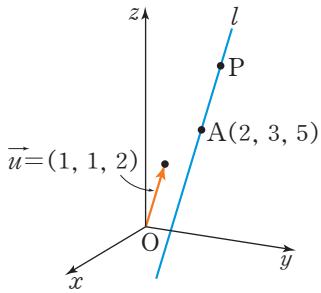
주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

생각 열기

오른쪽 그림은 좌표공간에서 점 $A(2, 3, 5)$를 지나는 직선 l과 직선 l에 평행한 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(1, 1, 2)$를 나타낸 것이다.

❶ 직선 l 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\vec{u}$는 어떤 관계인지 말해 보자.

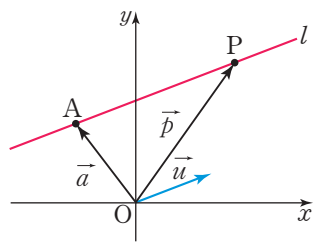
❷ 좌표공간 위의 임의의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AQ}$와 $\vec{u}$가 서로 평행하면 점 Q는 직선 l 위의 점이라고 할 수 있는지 말해 보자.



방향벡터를 이용한 직선의 방정식

위의 **생각 열기**에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선은 하나로 결정됨을 알 수 있다.

좌표평면에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식을 구해 보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{AP}/\!/\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$$

인 실수 t가 존재한다.

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로 $\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$에서

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

벡터를 이용하여 나타낸 직선의 방정식 ①을 직선 l의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 t의 값에 관계없이 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식이고, 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

이제 방정식 ①을 벡터의 성분을 이용하여 나타내 보자.

방향벡터를 $\vec{u}=(a, b)$라 하고, 두 점 A, P를 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{p}=(x, y)$이므로 방정식 ①은

$$(x, y)=(x_1, y_1)+t(a, b)=(x_1+at, y_1+bt)$$

로 나타낼 수 있다. 따라서

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

이고, ②는 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선 l의 방정식을 실수 t를 이용하여 나타낸 것이다.

또, ②에서 $ab\neq 0$일 때, 실수 t를 소거하면

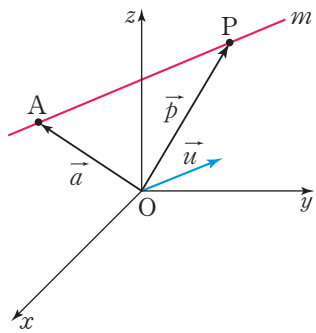
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

이고, 이 식도 직선 l의 방정식이다.

마찬가지 방법으로 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{P}(x, y, z)$를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(a, b, c)$에 평행한 직선 m의 방정식을 실수 t를 이용하여 나타내면

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases}$$

이다.

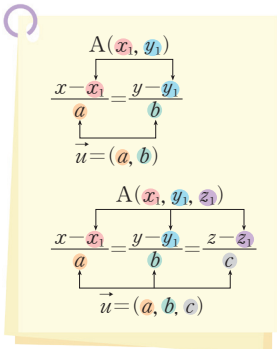


또, $abc\neq 0$일 때, 실수 t를 소거하면

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

이고, 이 식도 직선 m의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



방향벡터를 이용한 직선의 방정식

1 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \text{ (단, } ab\neq 0)$$

2 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b, c)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \text{ (단, } abc\neq 0)$$

보기 (1) 좌표평면에서 점 $(-2, 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 3)$인 직선의 방정식은

$$x+2=\frac{y-1}{3}$$

(2) 좌표공간에서 점 $(1, -3, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 1, -3)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=y+3=\frac{z-2}{-3}$$

문제 1 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 점 $(1, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, -3)$인 직선

(2) 점 $(2, 0, -1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(5, -2, 1)$인 직선

좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선이 $ab=0$인 경우와 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b, c)$인 직선이 $abc=0$인 경우에 대하여 알아보자.

좌표평면에서 실수 t를 이용하여 직선의 방정식을 나타내면

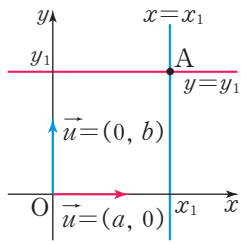
$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}$$

이다. 이때

$a=0$, $b\neq 0$이면 직선의 방정식은 $x=x_1$,

$a\neq 0$, $b=0$이면 직선의 방정식은 $y=y_1$

이다.



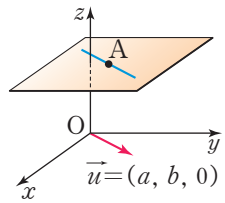
한편, 좌표공간에서 실수 t를 이용하여 직선의 방정식을 나타내면

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \\ z=z_1+ct \end{cases}$$

이다. 이때 $ab\neq 0$, $c=0$이면 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b},\ z=z_1$$

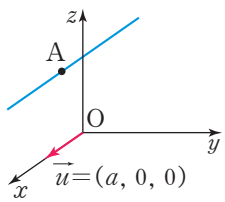
이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 xy평면과 평행한 직선을 나타낸다.



또, $a\neq 0$, $b=c=0$이면 직선의 방정식은

$$y=y_1,\ z=z_1$$

이고, 이 식은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 x축과 평행한 직선을 나타낸다.



그 밖의 경우에도 이와 같은 방법으로 직선의 방정식을 구할 수 있다.

보기 (1) 좌표평면에서 점 $(2, 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(0, 2)$인 직선의 방정식은

$x=2$

(2) 좌표공간에서 점 $(3, -1, 4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(4, 2, 0)$인 직선의 방정식은

$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{2}$, $z=4$

문제 2 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 점 $(1, -2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 0)$인 직선

(2) 점 $(2, 1, -1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(0, 6, 0)$인 직선

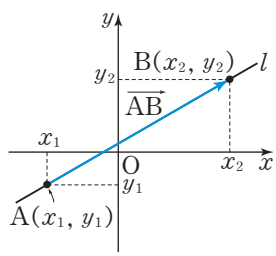
두 점을 지나는 직선의 방정식

좌표평면에서 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구해 보자.

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

이므로 직선 l은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$인 직선이다.



따라서 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

이다.

직선 l은 점 B를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}$

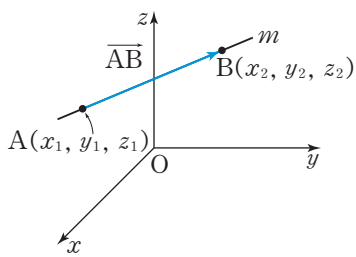
로 나타낼 수도 있다.

(단, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$)

마찬가지 방법으로 좌표공간에서 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선 m의 방향벡터는

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

이므로 직선 m은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$인 직선이다.



따라서 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선 m의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

1 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ (단, } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$$

2 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \text{ (단, } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2)$$

예제 1 두 점을 지나는 직선의 방정식 구하기

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(2, 1)$ (2) $\mathrm{A}(1, 1, 2)$, $\mathrm{B}(3, 5, -1)$

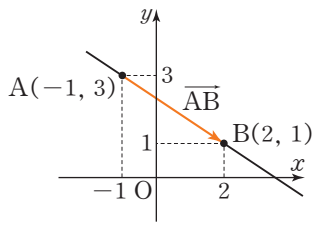
풀이

(1) **단계❶** 직선의 방향벡터 구하기

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-(-1), 1-3)$

$=(3, -2)$



단계❷ 직선의 방정식 구하기

따라서 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3, -2)$인 직선의 방정식은

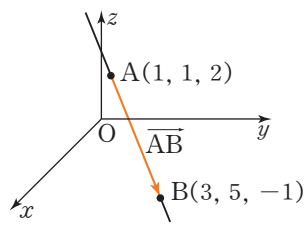
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}$$

(2) **단계❶** 직선의 방향벡터 구하기

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1, 5-1, -1-2)$

$=(2, 4, -3)$



단계❷ 직선의 방정식 구하기

따라서 점 $\mathrm{A}(1, 1, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2, 4, -3)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-3}$$

답 (1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}$ (2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-3}$

문제 3 **다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.**

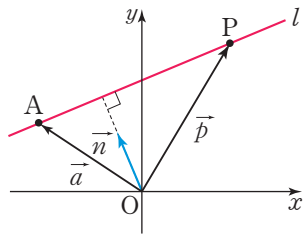
(1) $\mathrm{A}(2, -2)$, $\mathrm{B}(-1, 3)$ (2) $\mathrm{A}(6, 1)$, $\mathrm{B}(6, -2)$

(3) $\mathrm{A}(3, 0, 4)$, $\mathrm{B}(1, 2, -1)$ (4) $\mathrm{A}(3, 2, 1)$, $\mathrm{B}(3, 1, 1)$

좌표평면에서 주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

법선벡터를 이용한 직선의 방정식

좌표평면에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l의 방정식을 구해 보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$이므로

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l의 방정식이고, 이때 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 **법선벡터**라고 한다.

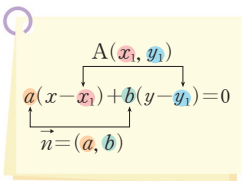
이제 방정식 ①을 벡터의 성분으로 나타내 보자.

법선벡터를 $\vec{n} = (a, b)$라 하고, 두 점 A, P를 각각 $A(x_1, y_1)$, $P(x, y)$라고 하면 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{p} = (x, y)$이므로 방정식 ①은 $(x - x_1, y - y_1) \cdot (a, b) = 0$으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



법선벡터를 이용한 직선의 방정식

좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$인 직선의 방정식은

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

보기 (1) 좌표평면에서 점 $(1, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, -3)$인 직선의 방정식은

$2(x-1)-3(y-2)=0$에서 $2x-3y+4=0$

(2) 좌표평면에서 점 $(2, -3)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (0, -2)$인 직선의 방정식은

$0(x-2)-2\{y-(-3)\}=0$에서 $y=-3$

문제 4 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 좌표평면에서 점 $(-5, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (-2, 0)$인 직선

(2) 좌표평면에서 점 $(4, 7)$을 지나고 직선 $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-5}{3}$에 수직인 직선

두 직선이 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까?

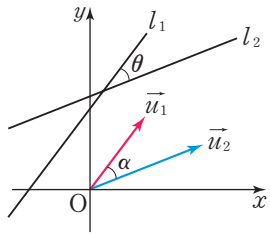
두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$를 구해 보자.

좌표평면에서 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각

$$\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1),\ \overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2)$$

라 하고, 두 방향벡터가 이루는 각의 크기를 α라고 하면 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기 θ는 α와 $180^\circ-\alpha$ 중에서 크지 않은 쪽과 같다. 따라서



두 직선이 이루는 각의 크기 θ는 $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}$$

이다.

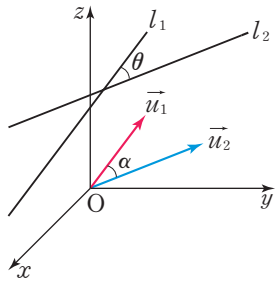
(i) $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$일 때
$\theta=\alpha$, $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\ge 0$이므로
$\cos\theta=\cos\alpha$
$=\dfrac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$
$=\dfrac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$

(ii) $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$일 때
$\theta=180^\circ-\alpha$, $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}<0$이므로
$\cos\theta=\cos(180^\circ-\alpha)$
$=\dfrac{-\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$
$=\dfrac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$

마찬가지 방법으로 좌표공간에서 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각

$$\overrightarrow{u_1}=(a_1, b_1, c_1),\ \overrightarrow{u_2}=(a_2, b_2, c_2)$$

라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면



$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}$$

이다.

예제 2 두 직선이 이루는 각의 크기 구하기

다음을 구하시오.

(1) 좌표평면에서 두 직선 $\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}=\dfrac{y+2}{3}$, $\dfrac{x}{\sqrt{3}}=y+3$이 이루는 각의 크기

(2) 좌표공간에서 두 직선 $\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z+1}{3}$, $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=z-1$이 이루는 각의 크기

풀이

(1) 두 직선의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}=(\sqrt{3}, 3)$, $\overrightarrow{u_2}=(\sqrt{3}, 1)$이라 하고, 두 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}+3\times 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{즉}\ \theta=30^\circ$$

(2) 두 직선의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}=(2, 1, 3)$, $\overrightarrow{u_2}=(3, -2, 1)$이라 하고, 두 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|2\times 3+1\times(-2)+3\times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{1}{2},\ \text{즉}\ \theta=60^\circ$$

답 (1) 30° (2) 60°

문제 5 다음을 구하시오.

(1) 좌표평면에서 두 직선 $x-1=\frac{y+2}{\sqrt{3}}$, $y=2$가 이루는 각의 크기

(2) 좌표공간에서 두 직선 $\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+1}{-2}$, $\frac{1-x}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{5}$이 이루는 각의 크기

두 직선의 수직 조건과 평행 조건

두 직선이 서로 수직일 조건과 평행할 조건을 알아보자.

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때, 두 직선이 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

또, 두 직선이 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 수직 조건과 평행 조건

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때

1 수직 조건: $l_1 \perp l_2 \iff \vec{u_1} \perp \vec{u_2} \iff \vec{u_1} \cdot \vec{u_2}=0$

2 평행 조건: $l_1 /\!/ l_2 \iff \vec{u_1} /\!/ \vec{u_2} \iff \vec{u_1}=k\vec{u_2}$ (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

예제 3 두 직선의 수직 조건과 평행 조건 이해하기

두 직선

$$l_1: \frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z+2}{k},\ l_2: \frac{2-x}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{6}$$

이 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k \neq 0$)

(1) $l_1 \perp l_2$ (2) $l_1 /\!/ l_2$

풀이

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}=(2, 1, k)$, $\vec{u_2}=(-4, -2, 6)$이라고 하자.

(1) $l_1 \perp l_2$이므로 $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}=0$

즉, $-8-2+6k=0$에서 $k=\frac{5}{3}$

(2) $l_1 /\!/ l_2$이므로 $\vec{u_1}=m\vec{u_2}$인 실수 m이 존재한다.

즉, $(2, 1, k)=(-4m, -2m, 6m)$에서 $m=-\frac{1}{2}$, $k=-3$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) -3

문제 6 좌표평면에서 두 직선

$$l_1: \frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-2},\ l_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{k}$$

가 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k\neq 0$)

(1) $l_1 \perp l_2$ (2) $l_1 /\!/ l_2$

문제 7 좌표공간에서 두 직선

$$l_1: \frac{x+1}{k}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{2},\ l_2: \frac{x+1}{k+1}=\frac{y-1}{k}=z+2$$

가 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k(k+1)\neq 0$)

(1) $l_1 \perp l_2$ (2) $l_1 /\!/ l_2$

생각 넓히기

문제해결 추론

다음은 두 직선

$$l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=z+1,\ l_2: x-3=\frac{y-5}{2}=2z$$

가 서로 같은 직선임을 두 학생이 설명하는 방법이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.



은우: 지나는 한 점과 방향벡터가 정해지면 직선은 하나로 결정됨을 이용할 거야.

서아: 서로 다른 두 점이 정해지면 직선은 하나로 결정됨을 이용할 거야.



두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}=(2, 4, 1)$, $\overrightarrow{u_2}=\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$

이라고 하면 $\overrightarrow{u_1}=$□$\overrightarrow{u_2}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$는 서로 평행하다.

또, 두 직선 모두 점 A(1, □, −1)을 지난다.

이때 한 점을 지나고 방향벡터가 평행한 두 직선은 일치하므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 같다.

직선 l_1 위에 있는 두 점 A(1, □, −1), B(□, 5, □)은 직선 l_2 위에도 있다. 즉, 두 직선 l_1과 l_2는 모두 두 점 A, B를 지난다.

이때 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 하나로 결정되므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 같다.

스스로 확인하기

04. 직선의 방정식
정답 및 해설 193쪽

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{\square}=\dfrac{\square}{b}$ (단, $ab\neq 0$)

(2) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b, c)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{\square}=\dfrac{\square}{c}$ (단, $abc\neq 0$)

(3) 좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$\square(x-x_1)+b(y-\square)=0$

(4) 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때

① $l_1\perp l_2 \Longleftrightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=\square$

② $l_1 /\!/ l_2 \Longleftrightarrow \vec{u_1}=k\square$ (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

02

좌표평면에서 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2, -3)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3, -2)$인 직선

(2) 점 $(1, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(4, 3)$인 직선

03

좌표공간에서 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(3, -1, 2)$를 지나고 직선 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=2(z-1)$에 평행한 직선

(2) 두 점 $(1, 2, 0)$, $(-2, 3, 2)$를 지나는 직선

04

좌표평면에서 두 직선

$l_1: \dfrac{x+1}{3}=y-1$, $l_2: \dfrac{x-2}{k}=3-y$

가 이루는 각의 크기가 45°가 되도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하시오. (단, $k\neq 0$)

05

좌표공간에서 두 직선

$l_1: \dfrac{x}{k}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{k+4}$,

$l_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{k-3}=\dfrac{z+4}{4}$

가 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오.

(단, $k(k-3)(k+4)\neq 0$)

(1) $l_1\perp l_2$ (2) $l_1 /\!/ l_2$

06 생각을 키우는 문제

좌표공간 위의 점 $A(1, 2, 3)$에서 직선

$l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

에 내린 수선의 발 H의 좌표를 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 H의 좌표는 $(2t+1, \boxed{\text{㉠}}, \boxed{\text{㉡}})$과 같이 나타낼 수 있다. ㉠, ㉡에 들어갈 식을 구하시오. (단, t는 실수이다.)

(2) 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 할 때, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0$임을 이용하여 점 H의 좌표를 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.	☺ ☺ ☺

05 평면과 구의 방정식

성취기준 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.

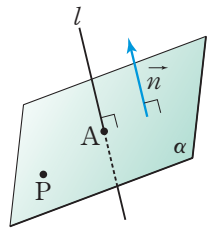
좌표공간에서 평면의 방정식은 어떻게 구할까?

생각 열기

오른쪽 그림은 좌표공간에서 평면 α 위의 한 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 l과 직선 l의 방향벡터 $\vec{n}$을 나타낸 것이다.

❶ 점 P가 평면 α 위에 있을 때, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}$의 값을 구해 보자.

❷ 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\vec{n}$이 서로 수직이면 점 P는 평면 α 위의 점이라고 할 수 있는지 말해 보자.



평면의 방정식

위의 **생각 열기**에서 좌표공간에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α는 하나로 결정됨을 알 수 있다.

좌표공간에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 방정식을 구해 보자.

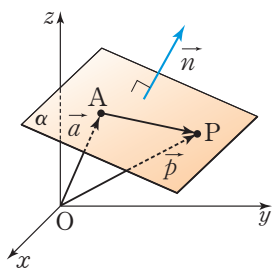
오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$이므로

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



배운 내용 떠올리기

평면 α와 직선 l에 대하여 $\alpha \perp l$이면 α 위의 모든 직선은 l과 수직이다.

벡터를 이용하여 나타낸 평면의 방정식 ①을 평면 α의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 평면 α 위에 있다.

따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α의 방정식이고, 이때 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 법선벡터라고 한다.

이제 방정식 ①을 벡터의 성분을 이용하여 나타내 보자.

법선벡터를 $\vec{n} = (a, b, c)$라 하고, 두 점 A, P를 각각 $A(x_1, y_1, z_1)$, $P(x, y, z)$라고 하면 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{p} = (x, y, z)$이므로 방정식 ①은

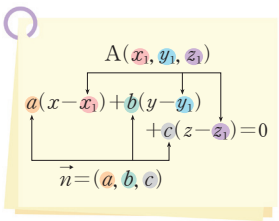
$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

이다. 즉,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



평면의 방정식

좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b, c)$인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

보기 (1) 점 $(1, 2, 0)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(3, -2, 4)$인 평면의 방정식은
$3(x-1)-2(y-2)+4(z-0)=0$에서 $3x-2y+4z+1=0$

(2) 점 $(1, -1, -2)$를 지나고 y축에 수직인 평면의 방정식은 벡터 $\vec{e_2}=(0, 1, 0)$을 법선벡터로 정할 수 있으므로 $0(x-1)+1\{y-(-1)\}+0\{z-(-2)\}=0$에서
$y=-1$

문제 1 다음 평면의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 4, 3)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-2, 1, 2)$인 평면

(2) 점 $(5, 3, -2)$를 지나고 z축에 수직인 평면



예제 1 평면의 방정식 구하기

점 $(1, 3, -2)$를 지나고 직선 l: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$에 수직인 평면의 방정식을 구하시오.

풀이

구하는 평면은 직선 l과 수직이므로 직선 l의 방향벡터는 구하는 평면의 법선벡터가 된다.
직선 l의 방향벡터가 $\vec{u}=(2, -2, 3)$이므로 점 $(1, 3, -2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2, -2, 3)$인 평면의 방정식은

$$2(x-1)-2(y-3)+3\{z-(-2)\}=0, \text{ 즉 } 2x-2y+3z+10=0$$

답 $2x-2y+3z+10=0$

문제 2 다음 평면의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2, 0, -1)$을 지나고 직선 $x+3=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{5}$에 수직인 평면

(2) 두 점 $(3, 1, 1)$, $(4, 0, -1)$을 지나는 직선에 수직이고 점 $(3, 1, 1)$을 지나는 평면

좌표공간에서 일차방정식 $ax+by+cz+d=0$이 나타내는 도형은 무엇일까?

일차방정식 $ax+by+cz+d=0$이 나타내는 도형

평면의 방정식 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$의 좌변을 전개하여 정리하면

$$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

이다. 이때 $-(ax_1+by_1+cz_1)=d$로 놓으면 평면의 방정식은

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

과 같이 x, y, z에 대한 일차방정식으로 나타낼 수 있다.

역으로 방정식 ①에서 a, b, c 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $a\neq0$이라고 하면 ①은

$$a\left(x+\frac{d}{a}\right)+by+cz=0$$

으로 나타낼 수 있다.

이 방정식은 점 $\left(-\frac{d}{a},\ 0,\ 0\right)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$인 평면을 나타낸다.

또, $b\neq0$ 또는 $c\neq0$인 경우도 $a\neq0$인 경우와 마찬가지이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면에서 x, y에 대한 일차방정식은 직선의 방정식이고, 좌표공간에서 x, y, z에 대한 일차방정식은 평면의 방정식이다.

일차방정식과 평면

좌표공간에서 x, y, z에 대한 일차방정식

$$ax+by+cz+d=0$$

은 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면을 나타낸다.

예제 2 세 점을 지나는 평면의 방정식 구하기

세 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0,\ -2)$를 지나는 평면의 방정식을 구하시오.

풀이

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 하고 주어진 세 점의 좌표를 대입하면

$$2a+d=0,\ 3b+d=0,\ a-2c+d=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

①에서 a, b, c를 d에 대한 식으로 나타내면

$$a=-\frac{d}{2},\ b=-\frac{d}{3},\ c=\frac{a+d}{2}=\frac{d}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

이때 $d=0$이면 $a=b=c=0$이므로 $d\neq0$이다.

②를 $ax+by+cz+d=0$에 대입하면 $-\frac{d}{2}x-\frac{d}{3}y+\frac{d}{4}z+d=0$이므로 구하는 평면의 방정식은

$$6x+4y-3z-12=0$$

답 $6x+4y-3z-12=0$

문제 3 다음 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구하시오.

(1) $A(3, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 1)$

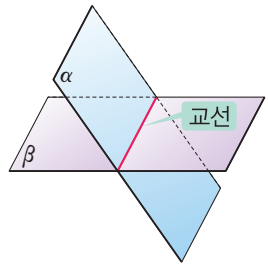
(2) $A(0, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, 0, 0)$

평행하지 않은 두 평면 α, β의 방정식을 각각

$$\alpha: ax+by+cz+d=0,$$

$$\beta: a'x+b'y+c'z+d'=0$$

이라고 할 때, 두 평면 α, β가 만나서 생기는 교선은 두 평면 α, β에 동시에 포함되는 점 (x, y, z) 전체의 집합이다.



따라서 두 평면 α, β의 교선의 방정식은 두 평면의 방정식을 연립하여 구할 수 있다.

예제 3 두 평면의 교선의 방정식 구하기

두 평면 $x+y-z-1=0$, $x-y+3z+3=0$의 교선의 방정식을 구하시오.

풀이

두 평면의 방정식에서 x를 소거하면

$$2y-4z-4=0$$

위의 식에서 z를 y에 대한 식으로 나타내면

$$z=\frac{y-2}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

두 평면의 방정식에서 y를 소거하면

$$2x+2z+2=0$$

위의 식에서 z를 x에 대한 식으로 나타내면

$$z=-x-1 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 구하는 교선의 방정식은

$$-x-1=\frac{y-2}{2}=z$$

답 $-x-1=\frac{y-2}{2}=z$

문제 4 **두 평면 $x+y+z-1=0$, $2x+y-z+1=0$의 교선의 방정식을 구하시오.**

예제 4 평면과 직선의 교점의 좌표 구하기

평면 $x-y+2z+2=0$과 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+2$의 교점의 좌표를 구하시오.

풀이

단계❶ 직선 위의 점을 실수 t를 이용하여 나타내기

$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z+2=t$ (t는 실수)라고 하면

$x=2t+1,\ y=3t,\ z=t-2$ ····· ①

단계❷ 실수 t의 값 구하기

①을 평면의 방정식 $x-y+2z+2=0$에 대입하면

$(2t+1)-3t+2(t-2)+2=0,\ t-1=0$

즉, $t=1$

단계❸ 평면과 직선의 교점의 좌표 구하기

$t=1$을 ①에 대입하면

$x=3,\ y=3,\ z=-1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(3,\ 3,\ -1)$이다.

답 $(3,\ 3,\ -1)$

문제 5 **평면 $2x-3y+z-1=0$과 직선 $\frac{x+1}{3}=y-1=\frac{z-2}{-2}$의 교점의 좌표를 구하시오.**

두 평면이 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까?

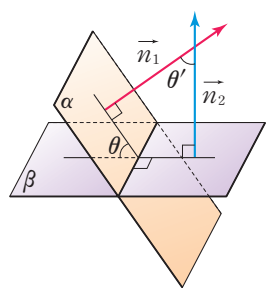
두 평면이 이루는 각의 크기

좌표공간에서 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ ($0^\circ\le\theta\le90^\circ$)를 구해 보자.

두 평면 α, β의 법선벡터를 각각

$\overrightarrow{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1),\ \overrightarrow{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$

라 하고, 두 법선벡터가 이루는 각의 크기를 θ'이라고 하면 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ는 θ'과 $180^\circ-\theta'$ 중에서 크지 않은 쪽과 같다.



두 평면이 이루는 각의 크기 θ는 $0^\circ\le\theta\le90^\circ$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

이다.



예제 5 두 평면이 이루는 각의 크기 구하기

두 평면 $x+2y-3z+1=0$, $3x-y-2z-1=0$이 이루는 각의 크기를 구하시오.

풀이

두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}=(1,\ 2,\ -3)$, $\vec{n_2}=(3,\ -1,\ -2)$라 하고, 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le90^\circ)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|1\times3+2\times(-1)+(-3)\times(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\theta=60^\circ$이다.

답 60°

문제 6 **다음 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하시오.**

(1) $5x+4y+3z+1=0$, $x+y+2z-2=0$

(2) $\sqrt{3}x-3y=0$, $2y+\sqrt{2}z-1=0$

문제 7 **세 점 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$를 지나는 평면과 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.**

두 평면의 수직 조건과 평행 조건

좌표공간에서 두 평면이 서로 수직일 조건과 평행할 조건을 알아보자.

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$일 때, 두 평면이 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

또, 두 평면이 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 평면의 수직 조건과 평행 조건

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$일 때

1 수직 조건: $\alpha\perp\beta\iff\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\iff\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

2 평행 조건: $\alpha\parallel\beta\iff\vec{n_1}\parallel\vec{n_2}\iff\vec{n_1}=k\vec{n_2}$ (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

예제 6 두 평면의 수직 조건과 평행 조건 이해하기

두 평면 α: $2x+4y+kz+1=0$, β: $-x+ky+z-2=0$이 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오.

(1) $\alpha \perp \beta$ (2) $\alpha /\!/ \beta$

풀이

주어진 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1}=(2, 4, k)$, $\vec{n_2}=(-1, k, 1)$이라고 하자.

(1) $\alpha \perp \beta$이므로 $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}=0$

즉, $2\times(-1)+4\times k+k\times 1=0$에서 $k=\frac{2}{5}$

(2) $\alpha /\!/ \beta$이므로 $\vec{n_1}=m\vec{n_2}$인 실수 m이 존재한다.

즉, $(2, 4, k)=(-m, km, m)$에서 $m=-2$, $k=-2$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) -2

문제 8 **두 평면 α: $x+2y+(k+1)z+1=0$, β: $kx-4y+2z-1=0$이 다음을 만족시킬 때, 실수 k의 값을 구하시오.**

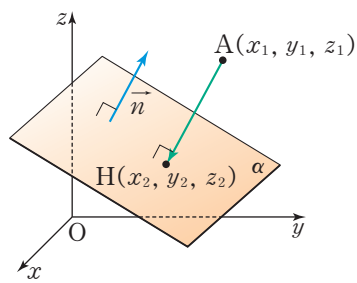
(1) $\alpha \perp \beta$ (2) $\alpha /\!/ \beta$

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리는 어떻게 구할까?

점과 평면 사이의 거리

좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 평면 α: $ax+by+cz+d=0$ 위에 있지 않은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2, y_2, z_2)$라고 하면 점 A와 평면 α 사이의 거리는 선분 AH의 길이와 같다.



평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AH}} /\!/ \vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\vec{n}|$$

이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n}|=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}||\vec{n}|$에서

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

이다. 그런데 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$ax_2+by_2+cz_2=-d$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}&a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)\\&=-(ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2)\\&=-(ax_1+by_1+cz_1+d) \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

이므로 ②를 ①에 대입하면

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

배운 내용 떠올리기

좌표평면에서 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

점과 평면 사이의 거리

좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

보기 점 $(2, 1, -3)$과 평면 $2x+y-2z+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times2+1\times1+(-2)\times(-3)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{12}{3}=4$$

문제 9 다음 점과 평면 사이의 거리를 구하시오.

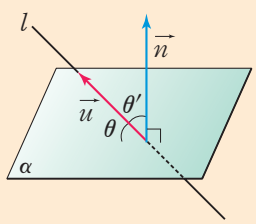
(1) 점 $(0, 0, 0)$, 평면 $3x+4y-5z-5=0$

(2) 점 $(-1, -1, 1)$, 평면 $x+2y+3z+14=0$

생각 넓히기

문제해결

직선 l: $x-1=y=\frac{z+1}{\sqrt{2}}$과 평면 α: $x-y+\sqrt{2}z=1$이 이루는 각의 크기 θ를 구하려고 한다. (단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)



1 직선 l의 방향벡터 $\vec{u}$와 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$이 이루는 각의 크기 θ'을 구해 보자.

2 θ와 θ' 사이의 관계를 구하고, 이를 이용하여 직선 l과 평면 α가 이루는 각의 크기 θ를 구해 보자.

좌표공간에서 구의 방정식은 벡터를 이용하여 어떻게 나타낼까?

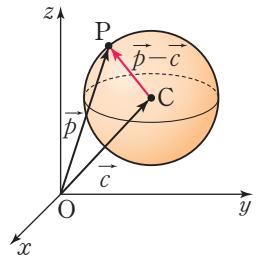
구의 방정식

좌표공간에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 구 위의 임의의 점을 P라고 하면

$$|\overrightarrow{CP}|=r$$

이다.



이때 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{CP}=\vec{p}-\vec{c}$이므로

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

벡터를 이용하여 나타낸 구의 방정식 ①을 구의 벡터방정식이라고 한다.

역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 구 위에 있다.

따라서 ①은 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식이다.

이제 방정식 ①을 벡터의 성분으로 나타내 보자.

①의 양변을 제곱하면 $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$이므로

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 두 점 C, P를 각각 $C(x_1, y_1, z_1)$, $P(x, y, z)$라고 하면

$$\vec{p}-\vec{c}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$$

이고, 이것을 ②에 대입하면

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)\cdot(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=r^2$$

이므로 구의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터로 나타낸 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구 위의 한 점 P에 대하여 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 할 때, 이 구를 벡터로 나타낸 방정식은

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \text{ 또는 } (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

88쪽에서 중심이 $C(x_1, y_1, z_1)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

임을 배웠다.

보기 중심이 $C(1, -1, 3)$이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점 P에 대하여 이 구의 방정식을 벡터로 나타내면

$|\vec{p}-\vec{c}|=2$, 즉 $|\vec{p}-(1, -1, 3)|=2$

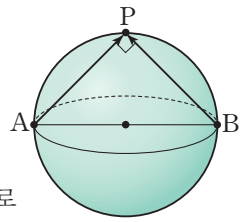
문제 10 점 $C(3, 1, 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구가 있다. 점 C의 위치벡터를 $\vec{c}$라 하고 구 위의 임의의 한 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 할 때, 구의 방정식을 벡터로 나타내시오.

예제 7 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식 구하기

벡터를 이용하여 두 점 $A(2, 4, 3)$, $B(-2, 0, 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.

풀이

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 임의의 한 점을 $P(x, y, z)$라고 하자.



세 점 A, B, P가 모두 서로 다른 점이면 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

또, 점 P가 점 A 또는 점 B와 일치하면 $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ 또는 $\overrightarrow{BP} = \vec{0}$이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

이때

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-4, z-3),$$
$$\overrightarrow{BP} = (x+2, y, z-1)$$

이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (x-2, y-4, z-3) \cdot (x+2, y, z-1) = 0$$

즉, $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

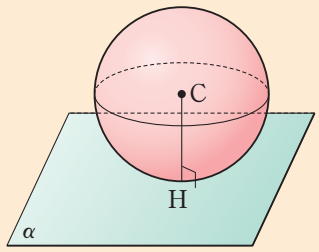
답 $x^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

문제 11 **벡터를 이용하여 두 점 $A(-1, 2, 4)$, $B(1, 4, -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.**

생각 넓히기

문제해결

좌표공간에서 중심이 $C(1, 0, 1)$이고 반지름의 길이가 3인 구가 점 $H(x_1, y_1, z_1)$에서 평면 α: $2x+2y+z-12=0$과 접할 때, 점 H의 좌표를 구하려고 한다.



1 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$에 대하여 $\overrightarrow{CH} = t\vec{n}$임을 이용하여 점 H의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내 보자. (단, t는 실수이다.)

2 점 H가 평면 α 위의 점임을 이용하여 t의 값과 점 H의 좌표를 구해 보자.

01 학습 목표 되새기기

다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b, c)$인 평면의 방정식은
$\square(x-x_1)+b(y-y_1)+\square(z-z_1)=0$

(2) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|\square|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(3) 좌표공간에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구 위의 한 점 P에 대하여 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 할 때, 이 구를 벡터로 나타낸 방정식은
$|\vec{p}-\vec{c}|=r$ 또는 $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=\square$

02

다음 평면의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1, 3, 2)$를 지나고 직선 $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{2}$에 수직인 평면

(2) 세 점 $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 1, 0)$을 지나는 평면

03

두 평면
$x+2y-z-1=0$, $2x+2y-3z+4=0$
의 교선의 방정식을 구하시오.

04

두 평면
$x+y+z+2=0$, $x-y+kz-1=0$
이 이루는 각의 크기가 60°가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

05

구 $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=1$ 위의 점 P와
평면 $2x+y-2z+1=0$ 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값을 구하시오.

06 생각을 키우는 문제

중심이 $C(0, 2, 3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$인 구 S가 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라고 할 때, 점 P에서 구 S에 접하는 평면 α의 방정식을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 구 S의 방정식을 구하시오.

(2) 점 P의 좌표를 구하시오.

(3) 벡터 $\overrightarrow{CP}$가 평면 α의 법선벡터임을 이용하여 평면 α의 방정식을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다.	😀 🙂 😐

구와 평면의 교선 찾기

학습 목표 공학 도구를 이용하여 좌표공간에서 구와 평면의 교선을 찾을 수 있다.

공학 도구를 이용하여 좌표공간에서 구와 평면의 교선에 대하여 알아보자.

: 구: 중심과 반지름

: 대상 위의 점

: 선분

: 수직평면

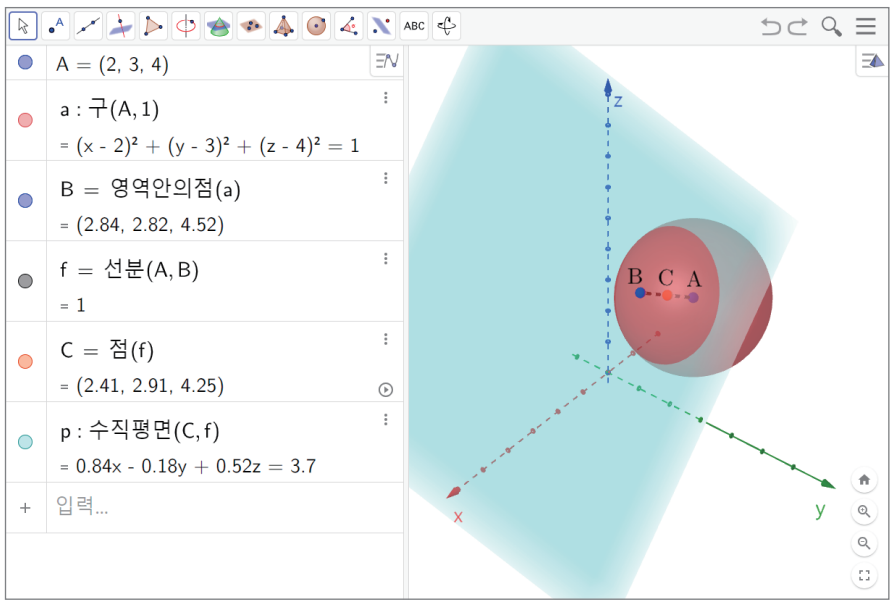
❶ 'A(2, 3, 4)'를 입력하면 좌표공간에 점 A가 나타나고, 을 선택한 후 점 A를 선택하여 반지름의 길이 '1'을 입력하면 중심의 좌표가 (2, 3, 4)이고 반지름의 길이가 1인 구 a가 나타난다.

❷ 을 선택한 후 구 위의 한 부분을 선택하면 구 a 위의 한 점 B가 나타난다.

❸ 을 선택한 후 두 점 A, B를 선택하면 선분 AB가 나타나고, 그 길이가 1임을 알 수 있다.

❹ 을 선택한 후 선분 AB 위의 한 부분을 선택하면 점 C가 나타난다.

❺ 을 선택한 후 점 C와 선분 AB를 차례대로 선택하면 선분 AB 위의 점 C를 지나고 선분 AB에 수직인 평면 p가 나타난다.



활동 1 **점 C를 자유롭게 이동해 보고, 다음 물음에 답해 보자.**

: 교선

(1) 점 B와 점 C가 일치할 때, 평면 p와 구 a는 한 점에서 만나는지 확인해 보자.

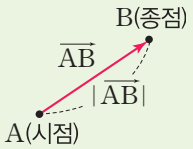
(2) 점 B와 점 C가 일치하지 않을 때, 을 선택한 후 평면 p와 구 a를 차례대로 선택하여 평면과 구의 교선이 어떤 도형을 나타내는지 확인해 보자.

(3) 점 C가 선분 AB의 중점일 때, 평면 p와 구 a의 교선이 나타내는 도형의 둘레의 길이를 구하고, 그 방법을 설명해 보자.

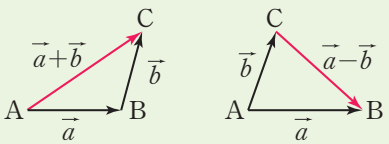
배운 내용 정리하기

1 벡터

벡터: 크기와 방향을 함께 가지는 양



2 벡터의 덧셈과 뺄셈



(1) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$에 대하여

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

(2) 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$에 대하여

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$$

3 벡터의 실수배

(1) 실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

① $k>0$이면 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

② $k=0$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

③ $k<0$이면 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

(2) 벡터의 평행: 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}\ (\text{단, } k\text{는 } 0\text{이 아닌 실수이다.})$$

4 위치벡터와 벡터의 성분

(1) 평면벡터

① $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때

ⓐ $\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1, a_2=b_2$

ⓑ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② 두 점 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$에 대하여

ⓐ $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

ⓑ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

(2) 공간벡터

① $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때

ⓐ $\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$

ⓑ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

② 두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

ⓐ $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

ⓑ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

5 벡터의 내적

(1) 벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

① $0^\circ\le\theta\le90^\circ$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

② $90^\circ<\theta\le180^\circ$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$$

(2) 성분으로 나타낸 벡터의 내적

① 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

② 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

6 직선의 방정식

(1) 좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

(2) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b, c)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\ (\text{단, } abc\neq0)$$

(3) 좌표평면에서 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

7 평면과 구의 방정식

(1) 좌표공간에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b, c)$인 평면의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(2) 좌표공간에서 점 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

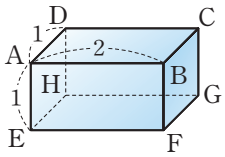
$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(3) 좌표공간에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 구 위의 한 점 P에 대하여 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 할 때, 이 구를 벡터로 나타낸 방정식은

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r\ \text{또는}\ (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

01 ●○○

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\overline{AE}=1$인 직육면체에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?



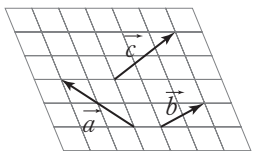
① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EG}$
② $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{CB}$
③ $\overrightarrow{AE}$는 단위벡터이다.
④ $|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{5}$
⑤ $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BG}$

02 ●○○

오른쪽 그림과 같이 일정한 간격의 평행선으로 이루어진 도형 위의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$

일 때, 상수 p, q의 값을 구하시오.



03 ●○○

두 점 A(2, 1, 0), B(−1, 3, 1)의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $2(\vec{a}+\vec{b})-3\vec{b}$의 크기를 구하시오.

04 ●○○

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$이다. 실수 k에 대하여 $|\vec{a}+k\vec{b}|$의 최솟값을 구하시오.

05 ●○○

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\angle ABC=90^\circ$인 삼각형 ABC의 변 AC 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}=0$일 때, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 값을 구하시오.

06 ●○○

두 벡터 $\vec{a}=(1, 3)$, $\vec{b}=(x, -2)$가 서로 수직이고 벡터 $\vec{b}$가 벡터 $\vec{c}=(2, y)$와 평행할 때, $x+y$의 값을 구하시오.

07 ●●○

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD에서 두 점 P, Q가

$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AQ}=-3\overrightarrow{DP}$

를 만족시킬 때, 삼각형 BPQ의 넓이를 구하시오.

08 ●●○

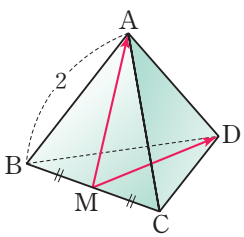
삼각형 ABC에서 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P, 선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점을 Q라고 하자. $\overrightarrow{PQ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

09 ●●○

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체에서 모서리 BC의 중점을 M이라고 할 때, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}$의 값을 구하시오.



10 ●●○

직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=z-9$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

11 ●●○

다음 두 직선을 모두 포함하는 평면의 방정식을 구하시오.

$$\frac{x-1}{2}=-y=\frac{z+2}{3},\ x-2=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

12 ●●○

좌표공간 위의 점 A(0, 3, 4)와 $|\overrightarrow{AP}|=2$를 만족시키는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}|$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

서술형

13 ●●○

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=7$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC의 외심을 P라고 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값을 구하시오.

14 ●●○

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=25$와 직선 $\frac{x}{3}=\frac{3-y}{3}=\frac{4-z}{8}$가 만나서 생기는 두 점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

사고력

15 ●●●

삼각형 ABC에서

$|\overrightarrow{AB}|=2$, $|\overrightarrow{AC}|=4$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

이다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, $|\overrightarrow{AD}|$의 값을 구하시오.

16 ●●●

구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=10$과 평면 $x+2y-2z=2$가 만나서 생기는 도형 위에 점 P가 있다. 이 평면 위의 점 A(4, 1, 2)에 대하여 선분 AP의 길이의 최댓값을 구하시오.

나의 학습을 스스로 점검해 보자.

이 단원을 공부하면서 알게 된 것을 써 보자.	이 단원을 공부하면서 어려웠던 점을 쓰고 복습 계획을 세워 보자.

도형을 벡터로 나타내고 문제를 해결하는 과정에서 수학적 표현의 유용성을 인식하였다.	😄 🙂 😐
벡터를 활용하여 문제해결을 위한 적절한 방법을 찾기 위해 끈기 있게 노력하였다.	😄 🙂 😐
벡터에 대한 기호를 이해하고 도형을 벡터로 나타낼 수 있었다.	😄 🙂 😐

수학 프로젝트 활동

추론

연결

항공기의 비행 속도 구하기

학습 목표 항공기의 운항에서 사용되는 벡터의 합을 이해할 수 있다.

다음은 어느 날 인천 공항에서 미국 로스앤젤레스(LA)를 향해 비행한 3대의 항공기 A, B, C의 평균 엔진 출력 속도, 비행 거리, 걸린 시간을 기록한 표이다.

항공기	평균 엔진 출력 속도	비행 거리	걸린 시간
A	883 km/h	12178 km	10시 15분
B	905 km/h	12058 km	10시 20분
C	888 km/h	10853 km	10시 18분

세 항공기의 출발 지점과 도착 지점은 서로 같았지만 평균 엔진 출력 속도, 비행 거리, 걸린 시간은 모두 달랐다. 두 항공기 A와 C의 비행 거리는 1300 km 이상 차이가 났는데, 이는 총 비행 거리의 약 10 % 정도로 결코 작은 수치가 아니다. 또, 평균 엔진 출력 속도를 비교하면 항공기 A가 883 km/h로 가장 느렸고, 항공기 B가 905 km/h로 가장 빨랐다. 그럼 항공기 A는 세 항공기 중에서 가장 느린 속도로 가장 먼 비행 거리를 날고도 가장 짧은 시간에 도착한 상황이 된다. 항공기 A에는 어떤 일이 있었던 것일까?

그 이유 중 하나는 제트 기류(Jet Stream)에서 찾을 수 있다. 제트 기류는 대류권 상부 또는 성층권 하부에서 발달한 좁고 강한 기류이다.



제트 기류는 북반구를 기준으로 서쪽에서 동쪽으로 흐르는데 일직선으로 흐르지 않고 뱀처럼 구불구불한 형태로 흐른다. 제트 기류의 평균 속도는 150 km/h(최대 400 km/h) 정도이고, 항공기의 순항 속도는 900 km/h 안팎이므로 제트 기류가 뒤에서 불 때와 앞에서 불어올 때의 상황은 판이하다. 따라서 비행할 때 제트 기류를 잘 이용하면 느린 평균 엔진 출력 속도로 더 빨리 도착할 수 있게 되므로 비행 시간이 단축되고, 연료도 절약할 수 있다.

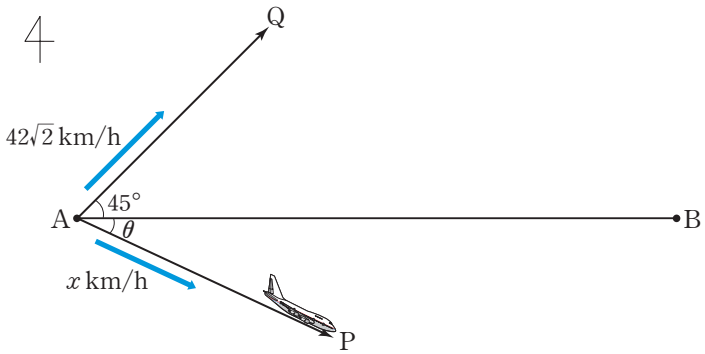
출처: K-공감누리집(https://gonggam.korea.kr)





이제 항공기를 타고 A 지점에서 B 지점으로 이동할 때 바람이 부는 방향에 따른 항공기의 진행 방향에 대하여 생각해 보자.

다음 그림과 같이 두 지점 A, B에 대하여 바람은 서남쪽에서 북동쪽 45° 방향으로 $42\sqrt{2}\,\text{km/h}$의 속도로 일정하게 불며, 항공기가 바람의 영향을 받지 않을 때의 비행 속도를 $x\,\text{km/h}$라고 하자. 두 지점 A, B를 잇는 최단 거리 방향으로 항공기를 운항하기 위해서는 북동쪽으로 일정하게 부는 바람으로 인해 비행기의 앞부분을 동남쪽 방향으로 잡아야만 한다.



위의 그림과 같이 항공기가 바람의 영향을 받지 않고 A 지점에서 직선 AB를 기준으로 동남쪽 θ 방향으로 이동할 때 t시간 후의 항공기의 위치를 P라 하고 점 A를 원점, 직선 AB를 x축으로 잡으면 $\overrightarrow{\text{AP}}=(xt\cos\theta,\ -xt\sin\theta)$이다. 또, 바람이 A 지점에서 북동쪽 45° 방향으로 이동할 때, t시간 후의 바람의 위치를 Q라고 하면 $\overrightarrow{\text{AQ}}=(42\sqrt{2}t\cos 45^\circ,\ 42\sqrt{2}t\sin 45^\circ)=(42t,\ 42t)$이다.

활동 1 **위의 그림에서 t시간 후 A 지점에서 출발한 항공기가 바람의 영향을 받아 B 지점에 도착하였을 때, 벡터 $\overrightarrow{\text{AB}}$를 성분으로 나타내 보자.**

활동 2 **위의 그림에서 바람이 북동쪽 45° 방향으로 $42\sqrt{2}\,\text{km/h}$의 속도로 일정하게 불 때, 항공기가 A 지점에서 동남쪽 8° 방향으로 이동하여 1시간 후 B 지점에 도착하였다고 하자. 이때 항공기의 비행 속도와 두 지점 A, B 사이의 거리를 구해 보자. (단, $\sin 8^\circ=0.14$, $\cos 8^\circ=0.99$로 계산한다.)**

나의 학습을 스스로 점검해 보고, 프로젝트 활동을 통해 느낀 점을 적어 보자.

평가 항목	자기 평가
벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 풍향과 풍속을 고려한 항공기의 비행 속도를 구할 수 있었다.	☺ ☺ 😐
문제해결의 도구로서 벡터의 유용성을 느끼고, 그 과정을 설명할 수 있었다.	☺ ☺ 😐

프로젝트 활동을 하면서 좋았던 점	프로젝트 활동을 하면서 배운 점

Ⅰ 이차곡선

이 단원에 들어가기 전에 10~11쪽

1 축의 방정식: $x=-1$, 꼭짓점의 좌표: $(-1, 1)$

2 $\frac{3}{4}$ **3** 5

4 (1) $y=-2x+11$ (2) $y=-x+4$

5 $2x+\sqrt{2}y=6$

6 (1) $(3, 4)$ (2) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

01 포물선 12~16쪽

생각 열기 12쪽

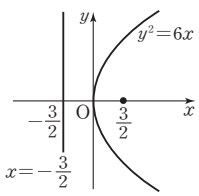
❶ $\overline{CP}+\overline{FP}$ ❷ $\overline{BP}=\overline{FP}$

1 16

2 (1) $y^2=16x$ (2) $y^2=-12x$

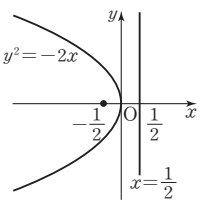
3 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{3}{2}$



(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

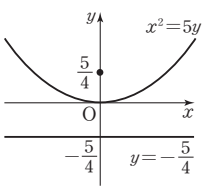
준선의 방정식: $x=\frac{1}{2}$



4 (1) $x^2=12y$ (2) $x^2=-y$

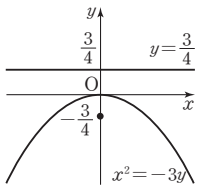
5 (1) 초점의 좌표: $\left(0, \frac{5}{4}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{5}{4}$



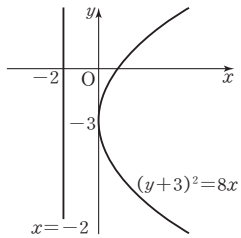
(2) 초점의 좌표: $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$

준선의 방정식: $y=\frac{3}{4}$



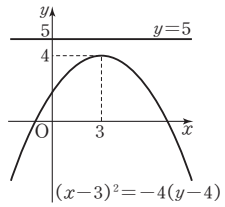
6 (1) 초점의 좌표: $(2, -3)$

준선의 방정식: $x=-2$



(2) 초점의 좌표: $(3, 3)$

준선의 방정식: $y=5$



생각 넓히기 16쪽

$p>0$이면 왼쪽으로 볼록한 포물선이고, $p<0$이면 오른쪽으로 볼록한 포물선이다. 또, $|p|$의 값이 커질수록 초점이 꼭짓점에서 멀어지고, 포물선의 폭이 점점 넓어진다.

스스로 확인하기 17쪽

01 (1) $y^2=4px$ (2) $x^2=4py$

02 (1) $y^2=2x$ (2) $x^2=-20y$

03 (1) 초점의 좌표: $(-1, -1)$

준선의 방정식: $x=-3$

(2) 초점의 좌표: $\left(4, \frac{17}{8}\right)$

준선의 방정식: $y=\frac{15}{8}$

04 $y^2=4\times4\times x$에서 포물선의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-4$이므로 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면

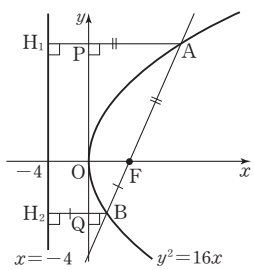
$\overline{AF}=\overline{AH_1}=\overline{AP}+4$,

$\overline{BF}=\overline{BH_2}=\overline{BQ}+4$

따라서

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AP}+4+\overline{BQ}+4$

$=18+4+4=26$

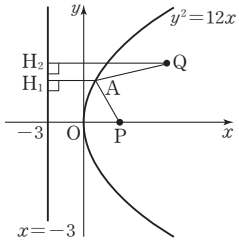


05 $y^2=4\times3\times x$에서 점 P는 포물선 $y^2=12x$의 초점임을 알 수 있다.

포물선 위의 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1, 점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2라고 하면

$\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{AH_1}+\overline{AQ}\geq\overline{QH_2}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{AQ}=\overline{QH_2}$일 때 $\overline{PA}+\overline{AQ}$의 값이 최소이고, $\overline{QH_2}=10$이므로 구하는 값은 10이다.



02 타원 18~22쪽

생각 열기 18쪽

$\overline{PF}+\overline{PF'}=$(실의 길이)이므로 변하지 않는다.

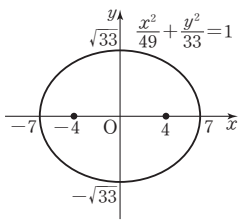
1 5

2 (1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ (2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

3 (1) 초점의 좌표: $(4, 0)$, $(-4, 0)$

장축의 길이: 14

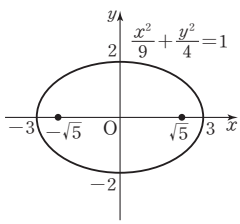
단축의 길이: $2\sqrt{33}$



(2) 초점의 좌표: $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

장축의 길이: 6

단축의 길이: 4

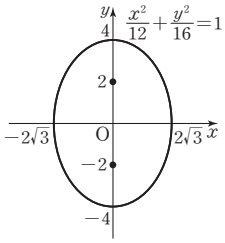


4 (1) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$

5 (1) 초점의 좌표: $(0, 2)$, $(0, -2)$

장축의 길이: 8

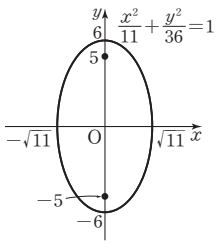
단축의 길이: $4\sqrt{3}$



(2) 초점의 좌표: $(0, 5)$, $(0, -5)$

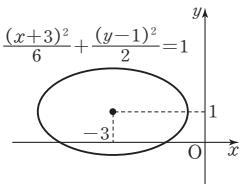
장축의 길이: 12

단축의 길이: $2\sqrt{11}$



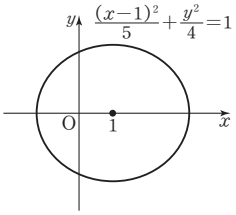
6 (1) 중심의 좌표: $(-3, 1)$

초점의 좌표: $(-1, 1)$, $(-5, 1)$



(2) 중심의 좌표: $(1, 0)$

초점의 좌표: $(2, 0)$, $(0, 0)$



스스로 확인하기 23쪽

01 (1) a^2-b^2, 0, a^2-b^2, 0, $2a$, $2b$

(2) 0, b^2-a^2, 0, b^2-a^2, $2b$, $2a$

02 (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$ (2) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$

03 (1) 중심의 좌표: $(-1, 2)$

초점의 좌표: $(\sqrt{5}-1, 2)$, $(-\sqrt{5}-1, 2)$

(2) 중심의 좌표: $(1, 0)$

초점의 좌표: $(1, 2)$, $(1, -2)$

04 $a=4$, $b=5$이므로 장축의 길이는 $2b=10$

두 점 A, B가 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{AF}+\overline{AF'}=10$, $\overline{BF}+\overline{BF'}=10$

따라서 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는

$(\overline{AF}+\overline{AF'})+(\overline{BF}+\overline{BF'})=10+10=20$

05 (1) 1.78+1.13=2.91이므로 장축의 길이는 2.91 AU이다.

(2) $\frac{2.91}{2}-1.13=0.325$이므로 중심에서 태양까지의 거리는 0.325 AU이다.

(3) $2\sqrt{1.455^2-0.325^2}=2.83647\cdots$이므로 단축의 길이는 2.84 AU이다.

03 쌍곡선 25~32쪽

생각 열기 25쪽

$\overline{AP}+\overline{PF'}=$(자의 길이), $\overline{AP}+\overline{PF}=$(실의 길이)에서

$\overline{PF'}-\overline{PF}=(\overline{AP}+\overline{PF'})-(\overline{AP}+\overline{PF})$

$=$(자의 길이)$-$(실의 길이)

이므로 변하지 않는다.

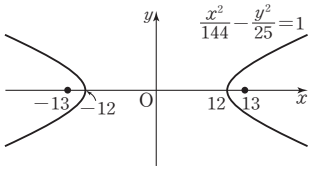
1 8

2 (1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ (2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{44}=1$

3 (1) 초점의 좌표: $(13, 0)$, $(-13, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(12, 0)$, $(-12, 0)$

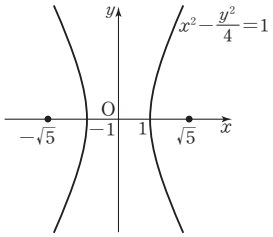
주축의 길이: 24



(2) 초점의 좌표: $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(1, 0)$, $(-1, 0)$

주축의 길이: 2

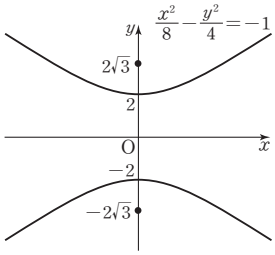


4 (1) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$ (2) $\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=-1$

5 (1) 초점의 좌표: $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$

꼭짓점의 좌표: $(0, 2)$, $(0, -2)$

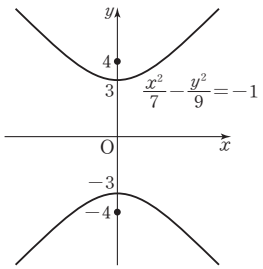
주축의 길이: 4



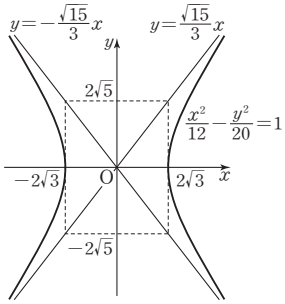
(2) 초점의 좌표: $(0, 4)$, $(0, -4)$

꼭짓점의 좌표: $(0, 3)$, $(0, -3)$

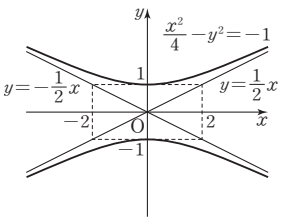
주축의 길이: 6



6 (1) 점근선의 방정식: $y=\frac{\sqrt{15}}{3}x$, $y=-\frac{\sqrt{15}}{3}x$



(2) 점근선의 방정식: $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$



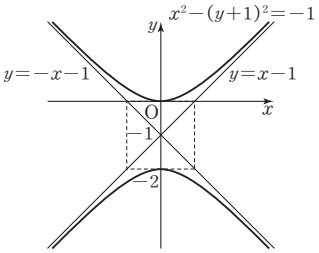
7 $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{3}=-1$

8 (1) 중심의 좌표: $(0, -1)$

초점의 좌표: $(0, \sqrt{2}-1)$, $(0, -\sqrt{2}-1)$

꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$, $(0, -2)$

점근선의 방정식: $y=x-1$, $y=-x-1$

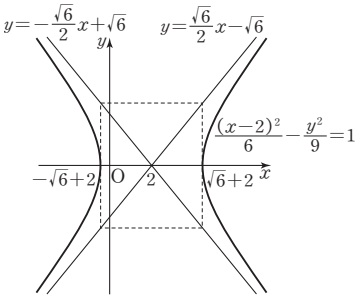


(2) 중심의 좌표: $(2, 0)$

초점의 좌표: $(\sqrt{15}+2, 0)$, $(-\sqrt{15}+2, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{6}+2, 0)$, $(-\sqrt{6}+2, 0)$

점근선의 방정식: $y=\frac{\sqrt{6}}{2}x-\sqrt{6}$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\sqrt{6}$

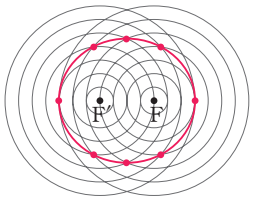


9 (1) 원 (2) 쌍곡선
(3) 포물선 (4) 타원

생각 넓히기 32쪽

1 두 점 F, F′에서의 거리의 차가 2로 같은 점들의 집합이기 때문이다. 이때 곡선은 두 점 F, F′을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선이다.

2 예시



빨간색 점에서 두 점 F, F′까지의 거리의 합은 10으로 일정하다. 이때 빨간색 점들을 곡선으로 연결하면 장축의 길이가 10인 타원이 된다.

스스로 확인하기 33쪽

01 (1) $2a$ (2) $y=\frac{b}{a}x$ (3) 이차곡선

02 (1) $x^2-\frac{y^2}{35}=1$ (2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$

03 (1) 초점의 좌표: $(2, 0)$, $(-2, 0)$
꼭짓점의 좌표: $(1, 0)$, $(-1, 0)$
주축의 길이: 2
점근선: $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$
(2) 초점의 좌표: $(0, \sqrt{15}-1)$, $(0, -\sqrt{15}-1)$
꼭짓점의 좌표: $(0, \sqrt{6}-1)$, $(0, -\sqrt{6}-1)$
주축의 길이: $2\sqrt{6}$
점근선: $y=\frac{\sqrt{6}}{3}x-1$, $y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x-1$

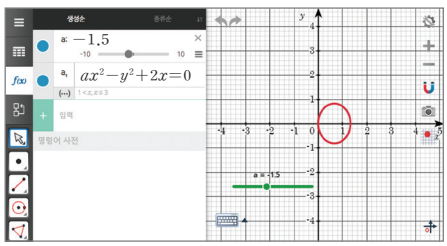
04 $a=4$, $b=3$이고 두 점 A, B가 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{AF'}-\overline{AF}=8$, $\overline{BF'}-\overline{BF}=8$
두 식을 더하면
$\overline{AF'}+\overline{BF'}-\overline{AF}-\overline{BF}=\overline{AF'}+\overline{BF'}-\overline{AB}=16$
이때 $\overline{AB}=10$이므로 $\overline{AF'}+\overline{BF'}=26$
따라서 삼각형 AF′B의 둘레의 길이는
$\overline{AF'}+\overline{BF'}+\overline{AB}=26+10=36$

05 쌍곡선의 중심의 좌표가 $(1, 0)$이므로 구하는 쌍곡선은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 쌍곡선의 중심에서 한 꼭짓점까지의 거리는 a의 값과 같으므로
$a=1$
한 점근선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 $b=\sqrt{3}$
따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은
$(x-1)^2-\frac{y^2}{3}=1$

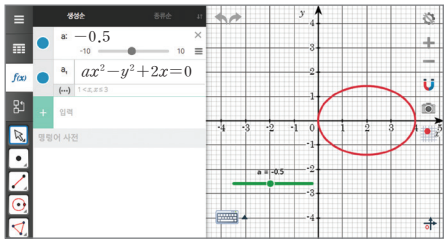
06 배에서 두 기지국에 이르는 거리의 차가 항상 30 km로 일정하므로 점 P는 주축의 길이가 30이고 A$(25, 0)$, B$(-25, 0)$을 두 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다.
$2a=30$에서 $a=15$이고, $c=25$에서 $b^2=25^2-15^2=400$이므로 쌍곡선의 방정식은
$\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$
점 P의 x좌표가 25이므로
$\frac{25^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$, 즉 $y=\pm\frac{80}{3}$
따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{80}{3}$이다.

탐구하는 수학 34쪽

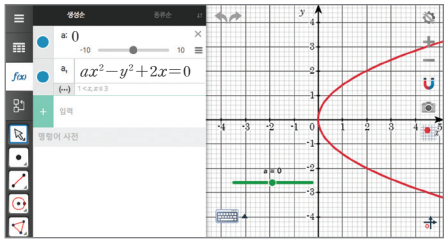
활동 1 (1) 예시 $a<-1$이면 x^2, y^2의 계수의 부호가 같고 x^2의 계수의 절댓값이 y^2의 계수의 절댓값보다 크므로 세로로 긴 타원이 그려질 것이다.



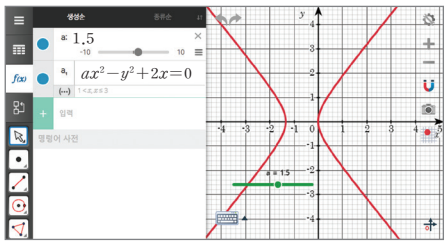
(2) 예시 $-1<a<0$이면 x^2, y^2의 계수의 부호가 같고 x^2의 계수의 절댓값이 y^2의 계수의 절댓값보다 작으므로 가로로 긴 타원이 그려질 것이다.



(3) 예시 $a=0$이면 $y^2=2x$이므로 왼쪽으로 볼록한 포물선이 그려질 것이다.



(4) 예시 $a>0$이면 x^2, y^2의 계수의 부호가 다르므로 초점이 x축 위에 있는 쌍곡선이 그려질 것이다.



04 이차곡선의 접선 35~43쪽

생각 열기 35쪽

❶ $D=(2k)^2-4\times2\times(k^2-4)=-4k^2+32$

❷ $-4k^2+32=0$이어야 하므로 $k=2\sqrt{2}$

1 (1) $y=2x+1$ (2) $y=-x+\frac{1}{2}$

2 $\frac{1}{2}$

3 (1) $y=\frac{1}{2}x-1$ (2) $y=-8x-16$

4 $y=x-1$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x+2$

5 (1) $y=2x+\sqrt{6}$ 또는 $y=2x-\sqrt{6}$

(2) $y=-2x+4$ 또는 $y=-2x-4$

6 3

7 (1) $y=x+5$ (2) $y=-x+3$

8 $x=2$ 또는 $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

9 (1) $y=2x+2\sqrt{2}$ 또는 $y=2x-2\sqrt{2}$

(2) $y=-3x+2\sqrt{13}$ 또는 $y=-3x-2\sqrt{13}$

10 -4

11 (1) $y=-2x-1$ (2) $y=\frac{1}{3}x+1$

12 $y=\frac{7}{5}x-\frac{2}{5}$ 또는 $y=-x+2$

생각 넓히기 43쪽

타원의 방정식 $x^2+3y^2=12$에서 양변의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(3y^2)=\frac{d}{dx}(12)$

에서 $2x+6y\frac{dy}{dx}=0$이고, 접점이 원점이 아니므로 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{3y}$

따라서 점 $(3, 1)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-1=-(x-3)$에서 $y=-x+4$이다.

ㅅㅅ로 확인하기 44쪽

01 (1) $y=mx+\frac{p}{m}$ (단, $m\neq0$),

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

(2) $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$, $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

02 $(2, 0)$

03 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x-2$

04 두 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

이고, 점 $A(-4, \sqrt{15})$를 지나므로

$\frac{16}{a^2}-\frac{15}{b^2}=1$ …… ㉠

또, 두 점 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$을 초점으로 하므로

$a^2+b^2=9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=4$, $b^2=5$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

따라서 점 A를 지나는 접선의 방정식은

$\frac{-4\times x}{4}-\frac{\sqrt{15}\times y}{5}=1$에서 $5x+\sqrt{15}y+5=0$

05 (1) $y^2=4x=4\times1\times x$이므로 $F(1, 0)$이다.

점 $P(1, 2)$에서의 접선의 방정식은 $2y=2(x+1)$에서 $y=x+1$이다.

(2) $A(-1, 0)$, $F(1, 0)$, $P(1, 2)$이므로 $\overline{AF}=\overline{PF}$,

$\overline{AF}\perp\overline{PF}$이다.

따라서 삼각형 FPA는 직각이등변삼각형이다.

탐구하는 수학 45쪽

활동 1 예시 손전등이나 탁상용 스탠드의 갓은 포물면의 초점에서 나온 광선을 포물면에 반사하여 모두 평행하게 나아가도록 하는 역할을 한다.

대단원 마무리 평가 Ⅰ. 이차곡선 47~49쪽

01 -6, 4	02 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$	03 ②	04 -15
05 ④	06 $\frac{7}{4}$	07 $20\sqrt{3}$ cm	08 8
09 4	10 9	11 $\frac{1}{8}$	12 $-\frac{1}{2}$
13 $8+16\sqrt{3}$	14 6	15 $\frac{13}{3}$	16 12

01 포물선 위의 점 $P(-1, 3)$에서 준선 $x=k$까지의 거리와 초점 $F(3, 0)$까지의 거리가 같으므로

$|k-(-1)|=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+(0-3)^2}$, $|k+1|=5$

따라서 $k=4$ 또는 $k=-6$이다.

02 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $a^2-b^2=3$, $2a-2b=2$이므로

$a=2$, $b=1$

따라서 구하는 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$이다.

03 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=4\sqrt{3}$, $\overline{QF}-\overline{QF'}=4\sqrt{3}$

두 식을 더하면 $\overline{PF'}-\overline{QF'}+\overline{QF}-\overline{PF}=8\sqrt{3}$

이때 $\overline{QF}-\overline{PF}=6$이므로 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=8\sqrt{3}-6$

04 $\overline{AP}=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$이고, 점 $P(x, y)$와 직선 $y=-3$까지의 거리는 $|y-(-3)|$이므로

$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=|y-(-3)|$

$x^2+(y-2)^2=|y+3|^2$, $x^2-10y-5=0$

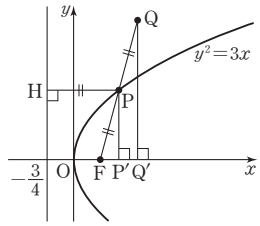
따라서 $a=0$, $b=0$, $c=-10$, $d=-5$이므로

$a+b+c+d=0+0+(-10)+(-5)=-15$

05 접선의 방정식은 $\frac{-2\times x}{6}+\frac{1\times y}{3}=1$에서 $y=x+3$

이 접선의 x절편은 -3, y절편은 3이므로 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times|-3|\times3=\frac{9}{2}$

06 포물선 $y^2=3x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, 준선은 $x=-\frac{3}{4}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $x=-\frac{3}{4}$에 내린 수선의 발을 H, x축에 내린 수선의 발을 P′, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 Q′이라고 하면



$\overline{PH}=\overline{PF}=2$이므로

$\overline{FP'}=\frac{1}{2}$

두 삼각형 PFP′, QFQ′에서 $\overline{FP}:\overline{FQ}=1:2$이므로

$\overline{FQ'}=1$

이때 $\overline{OQ'}=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$이므로 점 Q의 x좌표는 $\frac{7}{4}$이다.

07 결석과 충격파 발생 장치의 위치를 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하고, 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자.

$2a=40$, $2b=20$에서 $a=20$, $b=10$이므로

$c=\sqrt{a^2-b^2}=10\sqrt{3}$

따라서 충격파 발생 장치에서 결석까지의 거리는

$2c=20\sqrt{3}$(cm)

08 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이고 포물선 $y^2=-8x$의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

$D(-2, 0)$이라고 하면

$\overline{AB}+\overline{AD}=8$, $\overline{AD}=\overline{AC}$

따라서 $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=8$이다.

09 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 주축의 길이는 2이므로 $\overline{PF}-\overline{PF'}=2$

두 초점은 $F(\sqrt{5}, 0)$, $F'(-\sqrt{5}, 0)$이므로

$\overline{FF'}=2\sqrt{5}$ …… ㉠

이때 선분 FF′을 지름으로 하는 원은 선분 FF′을 빗변으로 하는 삼각형 PFF′의 외접원이므로 삼각형 PFF′은 직각삼각형이다. 즉,

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=\overline{FF'}^2$ …… ㉡

$\overline{PF'}=\overline{PF}-2$이므로 ㉠, ㉡에서

$\overline{PF}^2+(\overline{PF}-2)^2=(2\sqrt{5})^2$

$\overline{PF}=x$로 놓으면 $x^2+(x-2)^2=(2\sqrt{5})^2$

$x^2-2x-8=0$, $x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $\overline{PF}=4$이다.

10 주어진 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라고 하자.

$F(6, 0)$이므로 $a^2+b^2=6^2$ …… ㉠

점 $P(4, \sqrt{21})$은 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{16}{a^2}-\frac{21}{b^2}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=9$, $b^2=27$이므로 $A(3, 0)$

따라서 구하는 거리는

$\overline{AF'}=3+6=9$

11 점 P와 직선 $y=-x+5$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선이 직선 $y=-x+5$와 평행해야 한다.

점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$by=2\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times(x+a)$, 즉 $y=-\frac{1}{4b}(x+a)$

이때 $-\frac{1}{4b}=-1$이므로 $b=\frac{1}{4}$

이때 점 $P(a, b)$는 포물선 $y^2=-\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}a$, $a=-\frac{1}{8}$

따라서 $a+b=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$이다.

12 접점의 좌표를 (a, b)라고 하면 접선의 방정식은

$2ax+by=4$

이 접선이 점 $P(4, 4)$를 지나므로

$8a+4b=4$, 즉 $2a+b=1$ …… ㉠

또, 점 (a, b)는 타원 $2x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$2a^2+b^2=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $6a^2-4a-3=0$

이때 x_1, x_2는 이 이차방정식의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

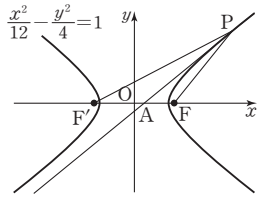
$x_1x_2=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$

13 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PF′F에서 직선 PA는 ∠F′PF의 이등분선이므로

$\overline{F'P}:\overline{FP}=\overline{F'A}:\overline{FA}$

$=5:3$ …… ㉮

즉, $3\overline{F'P}=5\overline{FP}$ …… ㉠



쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$에서 주축의 길이는 $4\sqrt{3}$이므로

$\overline{F'P}-\overline{FP}=4\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{FP}=6\sqrt{3}$, $\overline{F'P}=10\sqrt{3}$ …… ㉯

두 초점의 좌표는 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$이므로 $\overline{FF'}=8$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{FP}+\overline{F'P}+\overline{FF'}=6\sqrt{3}+10\sqrt{3}+8$

$=8+16\sqrt{3}$ …… ㉰

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	$\overline{F'P}:\overline{FP}$를 구했다.	30 %
㉯	두 선분 FP, F′P의 길이를 구했다.	40 %
㉰	삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구했다.	30 %

14 타원의 장축의 길이는 $4\sqrt{2}$이고, 단축의 길이는 4이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$이다.

타원 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{ax}{8}+\frac{by}{4}=1$이다. …… ㉮

접선 l의 x절편, y절편이 각각 $\frac{8}{a}$, $\frac{4}{b}$이고 접선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 $16\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=4\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{a}\times\frac{4}{b}=4\sqrt{2}$, $ab=2\sqrt{2}$ …… ㉯

즉, $a^2b^2=8$ …… ㉠

이때 점 $P(a, b)$는 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{4}=1$, $a^2+2b^2=8$ …… ㉡

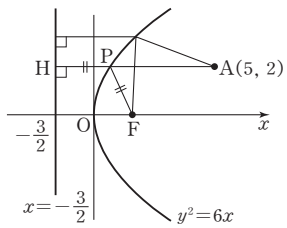
㉠, ㉡에서 $a^2=4$, $b^2=2$

따라서 $a^2+b^2=6$이다. …… ㉰

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	접선의 방정식을 a, b로 나타냈다.	30 %
㉯	ab의 값을 구했다.	40 %
㉰	a^2+b^2의 값을 구했다.	30 %

15 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 P에서 준선 $x=-\frac{3}{2}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{PF}=\overline{PH}$이므로

$\overline{PA}+\overline{PF}=\overline{PA}+\overline{PH}$



즉, 세 점 A, P, H가 한 직선 위에 있을 때 $\overline{PA}+\overline{PF}$가 최소이다.

점 P의 y좌표는 2이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$이다.

따라서 $\overline{AP}=5-\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$이다.

16 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P(3, 1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$, 즉 $y=-x+4$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P(3, 1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1$, 즉 $y=\frac{3b^2}{a^2}x-b^2$

두 접선의 기울기의 곱이 -1이므로

$-1\times\frac{3b^2}{a^2}=-1$, 즉 $a^2=3b^2$ …… ㉠

한편, 점 P(3, 1)은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=6$, $b^2=2$

따라서 $a^2b^2=12$이다.

수학 프로젝트 활동 50~51쪽

활동 1 (1) 직선 c_1은 선분 BC의 수직이등분선이므로 $\overline{BA_1}=\overline{CA_1}$에서

$\overline{AA_1}+\overline{BA_1}=\overline{AA_1}+\overline{CA_1}=\overline{AC}=10$

따라서 점 A_1에서 두 점 A, B까지의 거리의 합이 10으로 일정하므로 점 A_1이 그리는 도형은 타원임을 알 수 있다.

(2) 두 점 A, B는 타원의 초점이고, 반지름의 길이가 12이므로 $\overline{AA_1}+\overline{BA_1}=12$로 일정하다.

따라서 점 A_1이 그리는 도형의 방정식은

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

Ⅱ 공간도형과 공간좌표

이 단원에 들어가기 전에 54~55쪽

1 A(4, 2), B(−3, 0), C(0, −2)

2 (1) 모서리 EF, 모서리 FG, 모서리 GH, 모서리 EH

(2) 모서리 DH, 모서리 CG, 모서리 EH, 모서리 FG

3 (1) 5 (2) 8 **4** $\frac{1}{2}$

5 (1) $3\sqrt{2}$ (2) (1, 2) **6** $(x-3)^2+(y-2)^2=16$

01 직선과 평면의 위치 관계 56~63쪽

생각 열기 56쪽

1 (2), (3)

2 예시 일직선으로 놓여 있지 않은 길이가 같은 세 개의 막대 다리를 이용하면 안정적인 탁자를 만들 수 있다.

1 (1), (2), (4)

2 4

3 (1) 직선 AE, 직선 DH, 직선 EF, 직선 HG

(2) 평면 DHGC, 평면 BFGC

(3) 평면 BFGC

4 두 직선 l, m은 같은 평면 γ 위에 있다.

한편, $\alpha\parallel\beta$이므로 두 평면 α, β는 만나지 않는다.

이때 직선 l은 평면 α 위에 있고 직선 m은 평면 β 위에 있으므로 두 직선 l, m은 만나지 않는다.

따라서 두 직선 l, m은 한 평면 위에 있으므로 $l\parallel m$이다.

5 $\alpha\parallel\beta$이므로 두 평면 α, β는 만나지 않는다.

이때 직선 l은 평면 α 위에 있으므로 직선 l과 평면 β도 만나지 않는다.

따라서 $l\parallel\beta$이다.

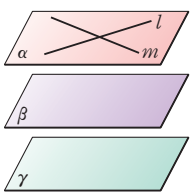
6 평면 α와 직선 m이 평행하지 않고 점 P에서 만난다고 가정하자.

이때 $l\parallel m$이므로 두 직선 l, m을 모두 포함하는 평면은 오직 하나 존재하고, 이 평면을 β라고 하면 점 P는 직선 m 위에 있으므로 평면 β 위에 있다.

따라서 점 P는 두 평면 α, β 위에 있으므로 두 평면의 교선 l 위에 있다.

즉, 두 직선 l, m은 점 P에서 만나고 이것은 $l\parallel m$에 모순이다. 따라서 $m\parallel\alpha$이다.

7 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있고 한 점에서 만나는 두 직선을 l, m이라고 하면 $\alpha\parallel\beta$이므로 $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$



두 직선 l, m이 평면 γ와 만난다고 가정하면 $\beta\parallel\gamma$이므로 두 직선 l, m은 평면 β와도 만난다.

이것은 $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$에 모순이므로 $l\parallel\gamma$, $m\parallel\gamma$

두 직선 l, m은 모두 평면 α 위에 있으므로 $\alpha\parallel\gamma$

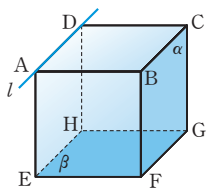
8 (1) 90° (2) 45°

9 직선 EH와 수직인 평면은 평면 AEFB와 평면 DHGC이다.
그 이유는 다음과 같다.
$\overline{EH}\perp\overline{AE}$, $\overline{EH}\perp\overline{EF}$이므로 $\overline{EH}\perp$(평면 AEFB)
$\overline{EH}\perp\overline{DH}$, $\overline{EH}\perp\overline{HG}$이므로 $\overline{EH}\perp$(평면 DHGC)

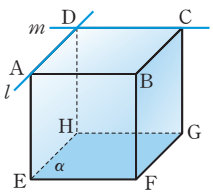
10 (1) 삼각형 ABC와 삼각형 BCD는 정삼각형이고 점 M은 모서리 BC의 중점이므로
$\overline{BC}\perp\overline{AM}$, $\overline{BC}\perp\overline{MD}$
따라서 모서리 BC가 평면 AMD 위의 점 M에서 만나는 두 선분 AM, MD와 각각 수직이므로
$\overline{BC}\perp$(평면 AMD)
(2) (1)에서 $\overline{BC}\perp$(평면 AMD)이고, 모서리 AD는 평면 AMD 위에 있으므로
$\overline{BC}\perp\overline{AD}$

생각 넓히기 63쪽

(1) 오른쪽 그림에서 $l\parallel\alpha$이고 $l\parallel\beta$이지만 α, β는 만난다. (거짓)



(2) 오른쪽 그림에서 $l\parallel\alpha$이고 $m\parallel\alpha$이지만 l, m은 한 점에서 만난다. (거짓)



(3) 참
(4) 참

스스로 확인하기 64쪽

01 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ○ (5) ×

02 ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 (1) 직선 FG
(2) 직선 AF, 직선 BG, 직선 EJ, 직선 IJ, 직선 JF, 직선 FG, 직선 GH
(3) 평면 BGHC, 평면 CHID
(4) 평면 FGHIJ

04 (1) 직선 BF와 직선 AD가 평행하므로 직선 AB와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 삼각형 ABD는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\angle BAD=90^\circ$
따라서 직선 AB와 직선 AD가 이루는 각의 크기가 90°이므로 직선 AB와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 90°이다.
(2) 직선 CF와 직선 AE가 평행하므로 직선 AD와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 AD와 직선 AE가 이루는 각의 크기와 같다.
이때 삼각형 ADE는 정삼각형이므로
$\angle DAE=60^\circ$
따라서 직선 AD와 직선 AE가 이루는 각의 크기가 60°이므로 직선 AD와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 60°이다.

05 (1) $\overline{AB}\perp$(평면 BFGC)이므로
$\overline{AB}\perp\overline{CF}$
또, 사각형 BFGC가 정사각형이므로 $\overline{BG}\perp\overline{CF}$이고, 두 직선 AB, BG는 평면 AHGB 위에 있으므로
$\overline{CF}\perp$(평면 AHGB)
(2) $\overline{AD}\perp$(평면 DHGC)이므로
$\overline{AD}\perp\overline{CH}$
또, 사각형 DHGC가 정사각형이므로 $\overline{DG}\perp\overline{CH}$이고, 두 직선 AD, DG는 평면 AFGD 위에 있으므로
$\overline{CH}\perp$(평면 AFGD)
(3) 직선 AG는 두 평면 AHGB, AFGD 위에 있으므로 (1)에서 $\overline{AG}\perp\overline{CF}$이고, (2)에서 $\overline{AG}\perp\overline{CH}$이다.
이때 두 직선 CF, CH는 평면 CHF 위에 있으므로
$\overline{AG}\perp$(평면 CHF)

02 삼수선 정리 65~69쪽

생각 열기 65쪽

90°

1 3

2 $\frac{13}{5}$

생각 넓히기 67쪽

점 Q에서 지면에 내린 수선의 발을 O라고 하면 $\overline{QO}\perp$(지면),
$\overline{OC}\perp\overline{PC}$이므로 삼수선 정리 **1**에 의하여
$\overline{QC}\perp\overline{PC}$

이때 $\overline{PC}=175$ m, $\tan(\angle QPC)=\frac{29}{25}$이므로 $\overline{QC}=203$ m

또, $\overline{MO}=120$ m, $\overline{CO}=\overline{CM}+\overline{MO}$이므로 $\overline{CO}=140$ m

삼각형 QCO는 직각삼각형이므로

$\overline{QO}=\sqrt{\overline{QC}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{203^2-140^2}=147$

따라서 피라미드의 높이는 147 m이다.

3 (1) 60° (2) 30°

4 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

생각 넓히기 69쪽

예시 정육면체의 꼭짓점 C에서 선분 HF에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각은 $\angle CFG$가 아니라 $\angle CMG$이다. 즉, 두 평면 CHF, EFGH가 이루는 각은 두 평면의 교선 HF에 수직인 선분 CM과 선분 GM이 이루는 각을 의미한다.

따라서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 때에는 교선에 수직인 두 선분이 이루는 각의 크기를 구해야 한다.

스스로 확인하기 70쪽

01 삼수선

(1) $\overline{PH}\perp l$ (2) $\overline{OH}\perp l$ (3) $\overline{PO}\perp\alpha$

02 $\overline{AH}=\overline{OH}=a$라고 하자.

$\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{OH}$가 평면 α에 포함되므로 $\overline{PO}\perp\overline{OH}$

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{PO}^2}=\sqrt{a^2+28}$ …… ㉠

한편, $\overline{PO}\perp\alpha$이고 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$

삼각형 AHP는 직각삼각형이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{100-a^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2+28}=\sqrt{100-a^2}$ 이므로

$a^2+28=100-a^2$, 즉 $a^2=36$

따라서 $\overline{PH}=\sqrt{36+28}=8$이다.

03 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 M이라고 하자.

이때 $\overline{AM}\perp\overline{BD}$, $\overline{EM}\perp\overline{BD}$이므로 $\theta=\angle AME$

$\overline{AM}=3\sqrt{2}$, $\overline{EM}=\sqrt{22}$이고, 삼각형 AEM은 $\angle MAE=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{AM}}{\overline{EM}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$

04 삼각형 BCM은 이등변삼각형이므로 모서리 BC의 중점을 N이라고 하면 $\overline{MN}\perp\overline{BC}$

또, 삼각형 BCD에서 $\overline{DN}\perp\overline{BC}$이므로 $\theta=\angle MND$

삼각형 AND는 이등변삼각형이므로 $\overline{MN}\perp\overline{AD}$

정사면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{DN}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{MN}}{\overline{DN}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

05 $\overline{PH}\perp$(평면 ABH)이고 $\overline{AH}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PA}\perp\overline{AB}$

삼각형 PAB에서 $\overline{AB}=15$ m이고 $\angle APB=30^\circ$이므로

$\overline{PB}=30$ m

또, $\overline{PH}\perp$(지면)이고 $\overline{BH}$가 지면에 포함되므로 $\overline{BH}\perp\overline{PH}$

삼각형 PBH는 직각삼각형이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{30^2-18^2}=24$

따라서 크리스마스트리의 높이는 24 m이다.

03 정사영 72~76쪽

생각 열기 72쪽

(3)

1 삼각형 HEF

2 (1) $3\sqrt{3}$ (2) 45° (3) 10

3 100 m^2

4 (1) $9\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

5 $6\sqrt{3}\pi$

스스로 확인하기 77쪽

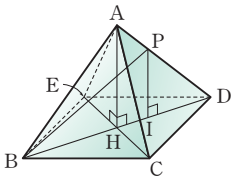
01 (1) $\cos\theta$ (2) $\cos\theta$

02 (1) 선분 EG (2) 삼각형 DAC

03 (1) $6\sqrt{2}=\overline{AB}\times\cos 45^\circ$이므로 $\overline{AB}=12$

(2) $5\overline{A'B'}=3\overline{AB}$이므로 $\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$

04 점 A의 평면 BCDE 위로의 정사영을 점 H라고 하면 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이다.



또, 점 P의 평면 BCDE 위로의 정사영을 점 I라고 하면 점 I는 선분 HD 위에 있고

$\overline{HI} : \overline{ID} = \overline{AP} : \overline{PD} = 1 : 2$이므로

$\overline{BI} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \overline{BD} = \frac{2}{3} \times \overline{BD}$

$= \frac{2}{3} \times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

한편, $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$이므로

$\overline{PI} = \frac{2}{3} \times \overline{AH} = 2\sqrt{2}$

삼각형 BIP는 직각삼각형이므로

$\overline{BP} = \sqrt{\overline{BI}^2 + \overline{PI}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$

$\overline{BI} = \overline{BP} \cos\theta$이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{BI}}{\overline{BP}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

05 (1) 구를 평면 α로 자른 단면의 넓이는

$\pi \times 10^2 = 100\pi$

(2) 풍선의 그림자의 넓이를 S라고 하면 지면과 평면 α가 이루는 각의 크기는 30°이다.

$S\cos 30^\circ = 100\pi$, $S \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\pi$이므로 $S = \frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

따라서 구하는 풍선의 그림자의 넓이는 $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$이다.

탐구하는 수학 78쪽

활동 1 $\cos\theta$, $\triangle B'C'D'$, $\triangle A'B'D'$, $\triangle ABC$

활동 2 (1) 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 P′Q′R′, 삼각형 PRS의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 P′R′S′이므로 활동 1의 결과에 의하여

$\triangle P'Q'R' = S_1 \times \cos\theta$, $\triangle P'R'S' = S_2 \times \cos\theta$이다.

(2) $S = S_1 + S_2$이고 (1)에서 $\triangle P'Q'R' = S_1 \times \cos\theta$, $\triangle P'R'S' = S_2 \times \cos\theta$이므로

$S' = \square P'Q'R'S'$

$= \triangle P'Q'R' + \triangle P'R'S'$

$= S_1 \times \cos\theta + S_2 \times \cos\theta$

$= (S_1 + S_2) \times \cos\theta$

$= S\cos\theta$

04 공간좌표 79~85쪽

생각 열기 79쪽

❶ (B, 4, 7) ❷ A열 3층 5번

1 (1) xy평면: (4, 3, 0), yz평면: (0, 3, −2), zx평면: (4, 0, −2)

(2) x축: (4, 0, 0), y축: (0, 3, 0), z축: (0, 0, −2)

2 (1) P(5, −2, 4), Q(0, −2, 4), R(5, −2, 0)

(2) P(3, 0, 0), Q(0, 4, 0), R(3, 4, −1)

3 (1) (3, 1, −4) (2) (−3, 1, 4)

4 (1) $\sqrt{51}$ (2) 7

5 (0, −1, 0)

생각 열기 83쪽

2 : 1

6 (1) (1, 3, 3) (2) $\left(\frac{1}{2}, 4, \frac{7}{2}\right)$

7 $a = 6$, $b = -1$

8 (3, 2, −2)

스스로 확인하기 86쪽

01 (1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

(2) $mz_2 + nz_1$

02 (1) xy평면: (1, 2, 0), yz평면: (0, 2, 3), zx평면: (1, 0, 3)

(2) x축: (1, 0, 0), y축: (0, 2, 0), z축: (0, 0, 3)

(3) xy평면: (1, 2, −3), yz평면: (−1, 2, 3), zx평면: (1, −2, 3), 원점: (−1, −2, −3)

03 (1) (−1, 3, 4) (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 3\right)$

04 점 B를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라고 하면 B′(6, −2, −1)이므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$의 최솟값은

$\overline{AB'} = \sqrt{\{6-(-1)\}^2 + (-2-2)^2 + (-1-3)^2} = 9$

05 점 D의 좌표를 (a, b, c)라고 하면 평행사변형의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{2+2}{2} = \frac{0+a}{2}$에서 $a = 4$,

$\frac{4+(-1)}{2} = \frac{2+b}{2}$에서 $b = 1$,

$\frac{-2+3}{2}=\frac{-1+c}{2}$에서 $c=2$

따라서 점 D의 좌표는 $(4, 1, 2)$이다.

06 (1) $P(t, t, 0)$, $Q(0, 10, 10-t)$

(2) $\overline{PQ}=\sqrt{(0-t)^2+(10-t)^2+\{(10-t)-0\}^2}$

$=\sqrt{3t^2-40t+200}$

$=\sqrt{3\left(t-\frac{20}{3}\right)^2+\frac{200}{3}}$ (단, $0\le t\le 10$)

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\frac{10\sqrt{6}}{3}$이다.

05 구의 방정식

87~89쪽

생각 열기

87쪽

❶ 평면에서 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 집합을 원이라고 한다.

❷ 예시 구의 중심에서 구 위의 임의의 한 점까지의 거리는 모두 같다.

1 (1) $(x+7)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=9$

(2) $x^2+y^2+z^2=16$

2 $(x-3)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=11$

3 (1) 중심의 좌표: $(3, -1, -3)$

반지름의 길이: 5

(2) 중심의 좌표: $(-2, 0, -4)$

반지름의 길이: 7

생각 넓히기

89쪽

1 xy평면에 접할 때 구의 중심에서 xy평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다. 구의 중심 $(1, 4, 3)$에서 xy평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(1, 4, 0)$이므로 구의 중심 $(1, 4, 3)$에서 xy평면까지의 거리는 z좌표의 절댓값인 3이다. 즉, 반지름의 길이는 3이므로 구하는 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9$

2 x축에 접할 때 구의 중심에서 x축까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다. 구의 중심 $(1, 4, 3)$에서 x축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(1, 0, 0)$이므로 구의 중심 $(1, 4, 3)$에서 x축까지의 거리는 $\sqrt{4^2+3^2}=5$이다. 즉, 반지름의 길이는 5이므로 구하는 구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=25$

스스로 확인하기

90쪽

01 (1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

(2) $x^2+y^2+z^2=r^2$

02 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=4$

(2) $x^2+y^2+z^2=21$

(3) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=18$

03 (1) 중심의 좌표: $(3, -1, 4)$

반지름의 길이: 2

(2) 중심의 좌표: $(-2, 1, 3)$

반지름의 길이: 4

04 구의 방정식에 $x=0$, $z=0$을 대입하면

$(y-3)^2=4$이므로 $y=5$ 또는 $y=1$이다.

즉, $A(0, 1, 0)$, $B(0, 5, 0)$ 또는 $A(0, 5, 0)$, $B(0, 1, 0)$이므로 $\overline{AB}=4$

또, 구의 중심 $C(2, 3, -1)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $H(0, 3, 0)$이므로

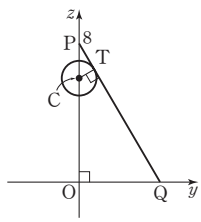
$\overline{CH}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=2\sqrt{5}$

05 (1) 원

(2) 주어진 도형을 yz평면으로 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.



구 $x^2+y^2+(z-6)^2=1$의 중심을 C라고 하면 $C(0, 0, 6)$

삼각형 PTC와 삼각형 POQ에서

$\angle PTC=\angle POQ=90^\circ$이고

$\angle P$는 공통이므로 삼각형 PTC와 삼각형 POQ는 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{PT}:\overline{TC}=\overline{PO}:\overline{OQ}$이다.

$\overline{PC}=2$, $\overline{TC}=1$이고 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{TC}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}:1=8:\overline{OQ}$

즉, $\overline{OQ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

(1)에서 구한 도형은 반지름의 길이가 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\times\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{64}{3}\pi$

탐구하는 수학 91쪽

활동 1 두 지점 P, Q가 모두 적도에 있고 점 P의 동경이 20°, 점 Q의 서경이 40°이므로 구면 위에서 두 지점 P, Q 사이의 최단 거리는 중심각의 크기가 60°이고 반지름의 길이가 6500 km인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

따라서 구하는 길이는

$$2\pi\times6500\times\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{6500}{3}\pi$$
$$=\frac{6500}{3}\times3.14$$
$$=6803.333\cdots$$

에서 약 6803 km이다.

대단원 마무리 평가 Ⅱ. 공간도형과 공간좌표 93~95쪽

01 6 **02** ⑤ **03** $(-1,\ -2,\ 3)$

04 $(-2,\ 0,\ 0)$ **05** $\frac{15}{2}$ **06** 4

07 $3\sqrt{13}\pi$ cm^2 **08** $2\sqrt{22}$ **09** $\sqrt{29}$

10 ⑤ **11** $3\sqrt{3}\pi$ **12** $\frac{7}{2}$ **13** 30°

14 $\sqrt{34}$ **15** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **16** $\frac{\sqrt{30}}{6}$

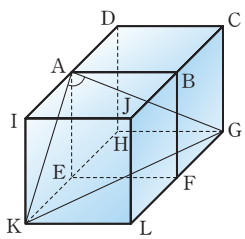
01 직선 AE와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 DC, 모서리 BC, 모서리 HG, 모서리 FG의 4개이므로 $a=4$

직선 BF와 수직인 면은 면 ABCD, 면 EFGH의 2개이므로 $b=2$

따라서 $a+b=6$이다.

02 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 나란히 붙이면 $\overline{CF}\parallel\overline{AK}$

이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 AK가 이루는 각의 크기와 같다.



이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라고 하면

$\overline{AK}=\sqrt{2}a$, $\overline{AG}=\sqrt{3}a$, $\overline{KG}=\sqrt{5}a$

삼각형 AKG에서

$\overline{AK}^2+\overline{AG}^2=2a^2+3a^2=5a^2=\overline{KG}^2$

이므로 삼각형 AKG는 $\angle KAG=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 직선 AG와 직선 AK가 이루는 각의 크기가 90°이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 90°이다.

03 점 A(1, 2, 3)을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(1,\ 2,\ -3)$이다.

점 P$(1,\ 2,\ -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-1,\ -2,\ 3)$이다.

04 점 P의 좌표를 $(a,\ 0,\ 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(0-2)^2+(0-1)^2$

$=(a-0)^2+(0-4)^2+\{0-(-1)\}^2$

$a^2-4a+9=a^2+17$

$-4a=8$, 즉 $a=-2$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 0,\ 0)$이다.

05 $\overline{RO}\perp\overline{OQ}$, $\overline{RO}\perp\overline{OP}$이므로 $\overline{RO}\perp\alpha$

또, $\overline{RO}\perp\alpha$, $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{RQ}\perp\overline{PQ}$

삼각형 RQO는 직각삼각형이므로

$\overline{RQ}=\sqrt{\overline{RO}^2+\overline{OQ}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

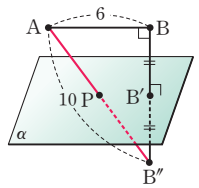
삼각형 PQO는 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PO}^2-\overline{OQ}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$

06 오른쪽 그림과 같이 점 B를 평면 α에 대하여 대칭이동한 점을 B″이라고 하자.



$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B''P}\geq\overline{AB''}$이므로

$\overline{AB''}=10$

삼각형 ABB″은 $\angle ABB''=90^\circ$인 직각삼각형이고,

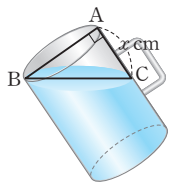
$\overline{AB}=6$이므로

$\overline{BB''}=\sqrt{\overline{AB''}^2-\overline{AB}^2}$

$=\sqrt{10^2-6^2}=8$

따라서 $\overline{BB'}=\frac{1}{2}\overline{BB''}=4$이다.

07 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}=x$ cm라고 하면



컵의 빈 공간의 부피에서

$\pi\times3^2\times2=\pi\times3^2\times x\times\frac{1}{2}$, $x=4$

$\angle ABC=\theta$라고 하면 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{BC}=2\sqrt{13}$ cm이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{AB}}{BC}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

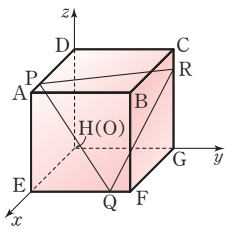
물이 쏟아지기 직전의 수면의 넓이를 S cm^{2}라고 하면

$\pi\times3^2=S\cos\theta$, $9\pi=\frac{3\sqrt{13}}{13}S$

즉, $S=3\sqrt{13}\pi$

따라서 구하는 넓이는 $3\sqrt{13}\pi$ cm^{2}이다.

08 점 H를 원점, 세 모서리 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향에 오도록 놓으면 P(8, 0, 10), Q(10, 8, 0), R(0, 10, 8)이다.



삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{8+10+0}{3}, \frac{0+8+10}{3}, \frac{10+0+8}{3}\right)$, 즉 (6, 6, 6)

S(6, 6, 6), G(0, 10, 0)이므로 선분 SG의 길이는

$\sqrt{(0-6)^2+(10-6)^2+(0-6)^2}=2\sqrt{22}$

09 두 점 A, B의 x좌표의 부호가 다르므로 두 점은 yz평면을 기준으로 서로 다른 쪽에 있다.

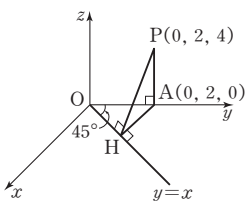
$\overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{29}$

이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\sqrt{29}$이다.

10 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 A라고 하면



A(0, 2, 0)

$\overline{PA}\perp(xy$평면), $\overline{PH}\perp\overline{OH}$이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp\overline{AH}$

직선 $y=x$가 y축과 이루는 각의 크기가 45°이므로

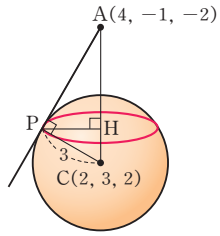
$\angle AOH=45^\circ$

$\overline{OA}=2$이므로 $\overline{AH}=\overline{OA}\sin45^\circ$에서 $\overline{AH}=\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 PHA에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

11 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 접점을 P, 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 접점이 그리는 도형은 반지름이 선분 PH인 원이다.



이때

$\overline{AC}=\sqrt{(2-4)^2+\{3-(-1)\}^2+\{2-(-2)\}^2}=6$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

이고,

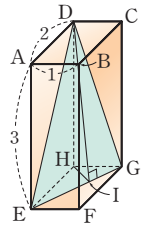
$\triangle APC=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{PC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PH}$에서

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3=\frac{1}{2}\times6\times\overline{PH}$, 즉 $\overline{PH}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\pi$

12 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라고 하면 $\overline{DI}\perp\overline{EG}$, $\overline{DH}\perp$(평면 EFGH)이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{EG}$



직각삼각형 HEG에서 $\overline{EG}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\triangle HEG=\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{HG}$에서

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{HI}=\frac{1}{2}\times2\times1$, 즉 $\overline{HI}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

한편, 직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

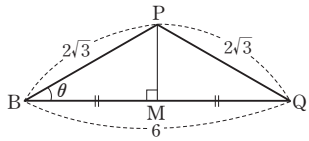
따라서 삼각형 DEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{EG}\times\overline{DI}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{7\sqrt{5}}{5}=\frac{7}{2}$

13 두 평면 α, β가 이루는 각은 $\angle PBQ$와 같다.

$\overline{QB}=\overline{QA}\sin45^\circ=6$ …… ㉮

$\overline{PB}=\overline{AB}\tan30^\circ=\overline{QB}\tan30^\circ=2\sqrt{3}$ …… ㉯



삼각형 PBQ는 $\overline{PB}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 위의 그림과 같이 점 P에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 점 M은 선분 BQ의 중점이다.

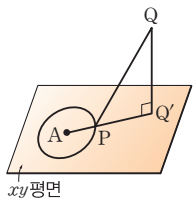
$\angle PBM=\theta$라고 하면 삼각형 PBM에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{PB}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 즉 $\theta=30^\circ$

따라서 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기는 30°이다. …… ㉑

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	선분 QB의 길이를 구했다.	25 %
㉯	선분 PB의 길이를 구했다.	25 %
㉑	두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기를 구했다.	50 %

14 점 Q의 xy평면 위로의 정사영을 Q′이라고 하면 Q′(6, 3, 0)이므로 $\overline{QQ'}=4$이다.



$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PQ'}^2+\overline{QQ'}^2}$

$=\sqrt{\overline{PQ'}^2+16}$ …… ㉠

이므로 두 점 P, Q′ 사이의 거리가 최소일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리가 최솟값을 갖는다. …… ㉮

한편, $\overline{AQ'}=\sqrt{(6-2)^2+\{3-(-1)\}^2+(0-0)^2}=4\sqrt{2}$이고 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 두 점 P, Q′ 사이의 거리의 최솟값은

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ …… ㉯

㉠에서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $\sqrt{(3\sqrt{2})^2+16}=\sqrt{34}$이다.

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{34}$이다. …… ㉑

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	점 P와 점 Q 사이의 거리가 최소가 되는 경우를 찾았다.	40 %
㉯	점 P와 점 Q의 xy평면 위로의 정사영인 점 사이의 거리의 최솟값을 구했다.	40 %
㉑	점 P와 점 Q 사이의 거리의 최솟값을 구했다.	20 %

15 세 선분 PQ, QR, RP의 길이를 각각 구하면

$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{QR}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

$\overline{PR}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

즉, 평면 PQR는 $\overline{PQ}=\overline{PR}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 점 M은 선분 QR의 중점이다.

$\overline{PM}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$이므로

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

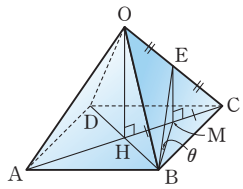
또, 평면 DEF는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\triangle DEF=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$

따라서 평면 PQR와 평면 DEF가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta=\frac{\triangle DEF}{\triangle PQR}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

16 오른쪽 그림과 같이 점 E와 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 M, H라고 하자.



선분 BE와 밑면 ABCD가 이루는 각의 크기는 선분 BE와 선분 BM이 이루는 각의 크기와 같다.

점 H는 선분 AC와 BD의 교점이고 점 M은 선분 HC의 중점이므로

$\overline{BH}=\overline{HC}=2\sqrt{2}$, $\overline{MH}=\frac{1}{2}\overline{HC}=\sqrt{2}$, $\overline{BE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 BMH에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{MH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{BE}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$이다.

수학 프로젝트 활동 96~97쪽

활동 1 (1) D$(0, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$

(2) E$(0, -\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$

F$(3, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$

G$(-3, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$

(3) 예시 평면 ABC와 평면 EFG는 서로 평행하다.

또, 삼각형 EFG의 무게중심의 좌표는

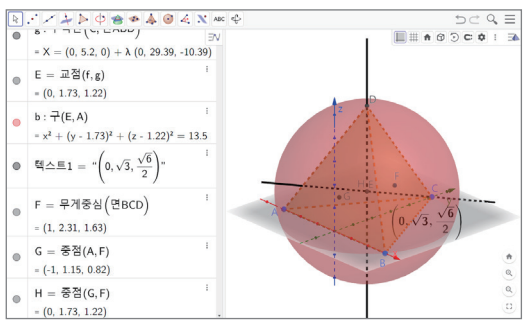
$(0, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$이고 이것은 점 D의 좌표와 일치한다.

활동 2 (1) E$\left(0, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(2) 네 점 A, B, C, D가 중심이 E인 구 위에 있으므로

$\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}=\overline{ED}$

(3)



'중점 (G, F)'를 입력하면 선분 GF의 중점 H가 나타나고, '무리수화(H)'를 입력하여 점 H의 좌표를 구하면 $\left(0, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$이다.

따라서 점 E와 점 H의 좌표는 서로 같으므로 두 점은 서로 일치한다.

Ⅲ 벡터

이 단원에 들어가기 전에 100~101쪽

1 (1) $x=3a-b$ (2) $x=a+2b$

2 (1) 모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG

(2) 모서리 CG, 모서리 DH, 모서리 EH, 모서리 FG

3 $\frac{9}{2}$

4 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$

5 (1) $y=3x-2$ (2) $y=-2x+5$

6 (1) $3\sqrt{6}$ (2) (0, 0, 1)

01 벡터의 뜻과 연산 102~116쪽

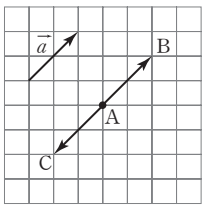
생각 열기 102쪽

❶ 높이, 길이, 넓이 ❷ 속도, 중력

1 (1) 1 (2) 2

2 (1) 1 (2) $\sqrt{10}$ (3) $\sqrt{14}$

3



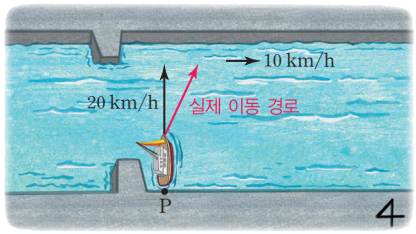
4 (1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $-\vec{b}$ (4) $-\vec{a}$

5 (1) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$

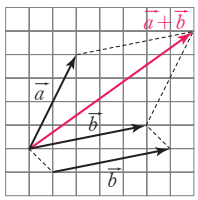
(2) $\overrightarrow{EG}$

(3) $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{GB}$

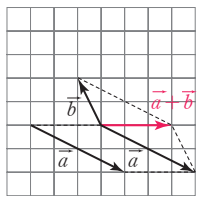
생각 열기 105쪽



6 (1)



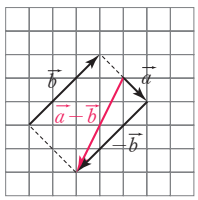
(2)



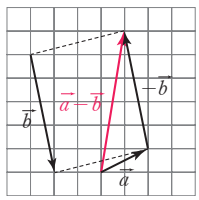
7 $\vec{0}$

8 $\overrightarrow{BD}$

9 (1)



(2)

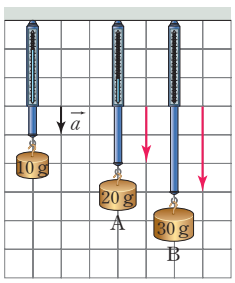


10 $\vec{a}-\vec{b}$

11 (1) $-\vec{b}+\vec{c}$ (2) $\vec{a}-\vec{c}$ (3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

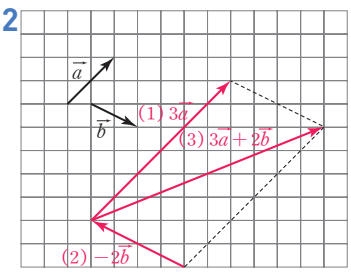
생각 열기 111쪽

❶



❷ 두 물체 A, B가 매달린 용수철에 가해지는 힘의 크기는 각각 $|\vec{a}|$의 2배, 3배이다.

12



13 (1) $\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $5\vec{a}+\vec{b}$

14 (1) $\vec{x}=\vec{a}+6\vec{b}$ (2) $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$

15 $3\vec{a}+2\vec{b}=6\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$이므로 두 벡터 $3\vec{a}+2\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$는 서로 평행하다.

16 15

17 $2\vec{x}-\vec{y}=2(2\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})=3\vec{a}+5\vec{b}$

$7\vec{z}-\vec{y}=7(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})=6\vec{a}+10\vec{b}=2(3\vec{a}+5\vec{b})$

이므로

$7\vec{z}-\vec{y}=2(2\vec{x}-\vec{y})$

따라서 두 벡터 $2\vec{x}-\vec{y}$, $7\vec{z}-\vec{y}$는 서로 평행하다.

18 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 하면

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

이므로 $\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{EG}$이다.

19 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}-3\vec{b}$

$=3(\vec{a}-\vec{b})=3\overrightarrow{AB}$

따라서 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

20 -1

생각 넓히기 116쪽

예시 $\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$는 원점 O를 시점으로 하고 크기가 1인 단위벡터를 나타낸다.

따라서 $\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$의 종점이 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.

스스로 확인하기 117쪽

01 (1) 벡터 (2) $\overrightarrow{AB}$, 시점, 종점
(3) 단위벡터 (4) 실수배

02 (1) $6\vec{a}-2\vec{b}$ (2) $5\vec{a}+\vec{b}$

03 (1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GE}$ (2) $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OE}$

04 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 서로 평행하려면 임의의 실수 m에 대하여 $\vec{y}=m\vec{x}$가 성립해야 한다. 따라서

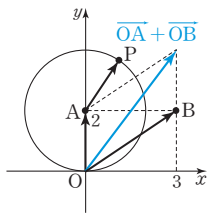
$-4\vec{a}+k\vec{b}=m(2\vec{a}-\vec{b})$

에서 $2m=-4$, 즉 $m=-2$이므로 $k=2$이다.

05 (1) $\overrightarrow{AP}$

(2) $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OB}|=|(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{AP}|$

즉, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}|$의 값이 최대이려면 다음 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{AP}$가 서로 평행해야 한다.



이때

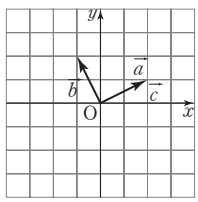
$|(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{AP}|\le|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{AP}|$

$=5+2=7$

이므로 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}|$의 최댓값은 7이다.

02 위치벡터와 벡터의 성분 118~131쪽

생각 열기 118쪽

❶ 

❷ $\vec{a}$, $\vec{c}$

1 (1) $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ (2) $-3\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{c}$

2 (1) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

3 $|\overrightarrow{AM}|:|\overrightarrow{BM}|=1:1$이므로 벡터 $\overrightarrow{AM}$을 $\overrightarrow{AB}$로 나타내면

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ …… ㉠

이때 세 점 A, B, M의 위치 벡터가 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$이므로

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ …… ㉡

$\overrightarrow{AM}=\vec{m}-\vec{a}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\vec{m}-\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

따라서 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$\vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

4 (1) $\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ (2) $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

5 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 하고, 무게중심 G의 위치벡터를 $\vec{g}$라고 하면 $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$이므로

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{g}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\times\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$=\vec{0}$

생각 넓히기 121쪽

1 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

즉, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$에서

$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$

이므로 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$이다.

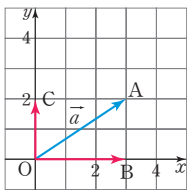
2 삼각형 ABC에서 밑변을 선분 AB로 생각하면

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$

이므로 두 삼각형 APC, BPC의 넓이의 비는 2 : 1이다.

생각 열기 122쪽

❶



❷ $\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

6 (1) $\vec{a}=2\vec{e_1}-2\vec{e_2}$, $\vec{b}=\vec{e_1}+3\vec{e_2}$

(2) $\vec{a}=(2,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$

7 (1) $\vec{a}=(5,\ 2)$ (2) $\vec{b}=(-3,\ 7)$

(3) $\vec{c}=-10\vec{e_1}+\vec{e_2}$ (4) $\vec{d}=-6\vec{e_2}$

8 $m=1$, $n=2$

9 (1) $|\vec{a}|=5$ (2) $|\vec{b}|=13$

10 (1) $(-4,\ 3)$ (2) $(-7,\ 4)$

(3) $(-9,\ 5)$ (4) $(-5,\ 2)$

11 $k=1$, $l=3$

12 (1) $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$, $\vec{c}=(-3,\ 4)$

(2) $k=1$, $l=-2$

13 -3

14 (1) $\overrightarrow{AB}=(3,\ 4)$, $|\overrightarrow{AB}|=5$

(2) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2)$, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$

15 (1) $\vec{a}=(10,\ -8,\ 3)$ (2) $\vec{b}=\left(-4,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$

(3) $\vec{c}=7\vec{e_1}-2\vec{e_2}+9\vec{e_3}$ (4) $\vec{d}=5\vec{e_1}-6\vec{e_2}$

16 $l=1$, $m=-1$, $n=-1$

17 (1) $|\vec{a}|=3\sqrt{10}$ (2) $|\vec{b}|=4$

18 (1) $(-3,\ 5,\ 2)$ (2) $(-1,\ 5,\ -1)$

19 $\frac{1}{2}$

20 (1) $\overrightarrow{AB}=(-2,\ -1,\ 2)$, $|\overrightarrow{AB}|=3$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-4,\ -5,\ -3)$, $|\overrightarrow{AB}|=5\sqrt{2}$

스스로 확인하기 132쪽

01 (1) 위치벡터

(2) ① b_1, b_2 ② $a_2^{\ 2}$

(3) ① b_2-a_2 ② $(b_1-a_1)^2$

(4) ① b_1, b_2, b_3 ② $a_3^{\ 2}$

(5) ① b_3-a_3 ② $(b_3-a_3)^2$

02 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 할 때 $\vec{p}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$

$=\vec{p}-\vec{a}$

$=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{a}$

$=\frac{-\vec{a}+\vec{b}}{3}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

03 $x=-1$, $y=2$, $z=3$이므로 $\vec{a}=(3,\ 1,\ 2)$이다.

따라서 $|\vec{a}|^2=3^2+1^2+2^2=14$이다.

04 D$(a,\ b,\ c)$라고 하면

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ -2,\ 5)$, $\overrightarrow{CD}=(a-7,\ b-2,\ c-5)$

이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$에서 $a=4$, $b=0$, $c=10$이다.

따라서 점 D의 좌표는 $(4,\ 0,\ 10)$이다.

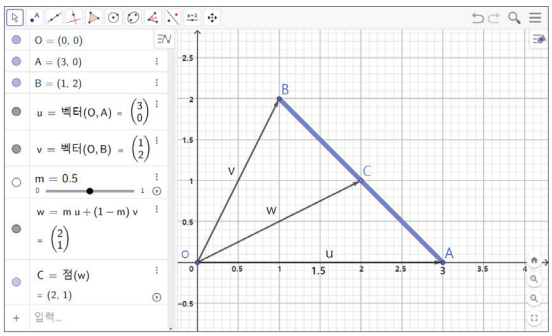
05 (1) 기지의 위치: (0, 6), 현재 위치: (4, 4)

(2) $\vec{p}=(0, 6)-(4, 4)=(-4, 2)$

(3) $|\vec{p}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$이므로 현재 위치에서 기지까지의 거리는 $2\sqrt{5}$ km이다.

탐구 하는 수학 133쪽

활동 1



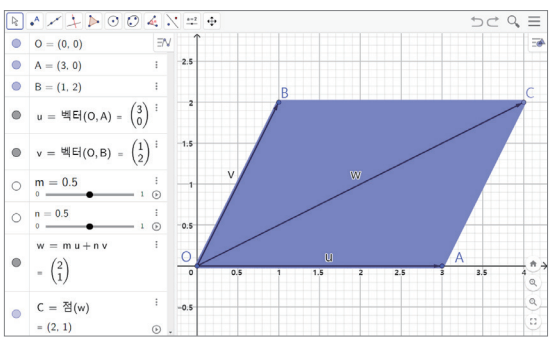
점 C는 선분 AB를 나타낸다.

활동 2 본문에 주어진 ❶, ❷의 과정을 실행한 후 다음의 과정을 실행한다.

❸ 'm', 'n'을 각각 입력하여 슬라이더를 나타내고 범위를 0부터 1까지로 설정한 후, m, n의 값을 각각 0.5로 둔다.

❹ 'm*u+n*v'를 입력하면 벡터 w로 표시되고, 이것은 벡터 $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$를 나타낸다.

❺ A을 선택하고 ❹에서 나타낸 벡터의 끝을 선택하여 점 C를 나타내고, 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭한 후 '자취 보이기'를 선택한다.



$m=1$, $n=1$일 때의 벡터 w의 끝 점의 좌표는 (4, 2)이고, m, n의 슬라이더를 움직이면 점 C가 나타내는 도형은 평행사변형 OACB의 내부와 그 둘레이다.

03 벡터의 내적 134~143쪽

생각 열기 134쪽

❶ $|\vec{F}|\cos\theta$ ❷ $|\vec{F}|\cos\theta\times d$

1 (1) $3\sqrt{2}$ (2) 0 (3) $-3\sqrt{3}$

2 (1) 9 (2) 0

3 (1) -1 (2) 1

4 (1) 2 (2) -1

5 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

6 $\sqrt{10}$

7 (1) 0 (2) 5

8 (1) 30° (2) 135°

9 (1) -3 (2) 3

10 $\vec{b}=(8, 6)$ 또는 $\vec{b}=(-8, -6)$

11 $x=2$, $y=3$

생각 넓히기 143쪽

1 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AB})=\vec{b}-\vec{a}$

2 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2$

이때 마름모 ABCD의 모든 변의 길이는 같으므로 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$이다.

따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$이므로 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$이다.

스스로 확인하기 144쪽

01 (1) $-|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180°-\theta)$

(2) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

(3) 0, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|$

02 (1) 9 (2) 0

03 $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$이고,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=-3\times2\times\frac{1}{2}=-3$

이므로

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4\times3^2-12\times(-3)+9\times2^2=108$

따라서 $|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$이다.

04 $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{5}{2},\ -\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)=(3,\ -1)$

$\vec{a}-\vec{b}=\left(\frac{5}{2},\ -\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)=(2,\ -6)$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(3,\ -1)\cdot(2,\ -6)=12$

이때 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})>0$이므로

$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|}$

$=\frac{12}{\sqrt{10}\times2\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$

05 $\vec{a}+k\vec{b}=(2,\ 1,\ 0)+k(0,\ 1,\ 2)=(2,\ 1+k,\ 2k)$

(1) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 수직이면

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$

이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=(2,\ 1,\ 0)\cdot(2,\ 1+k,\ 2k)=5+k=0$

따라서 $k=-5$이다.

(2) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하면

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=\pm|\vec{a}||\vec{a}+k\vec{b}|$

가 성립하므로

$5+k=\pm\sqrt{5}\sqrt{2^2+(1+k)^2+(2k)^2}$

$24k^2=0$

따라서 $k=0$이다.

06 (1) $\overrightarrow{PA}=(2-p,\ 4-q)$

$\overrightarrow{PB}=(3-p,\ 1-q)$

(2) $q=-2p$이므로

$\overrightarrow{PA}=(2-p,\ 4+2p)$, $\overrightarrow{PB}=(3-p,\ 1+2p)$

이때

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(2-p,\ 4+2p)\cdot(3-p,\ 1+2p)$

$=(2-p)(3-p)+(4+2p)(1+2p)$

$=5p^2+5p+10$

$=5\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$

이므로 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값은 $\frac{35}{4}$이다.

04 직선의 방정식 146~154쪽

생각 열기 146쪽

❶ 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\vec{u}$는 서로 평행하다.

❷ 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선은 하나로 결정되므로 점 Q는 직선 l 위에 있다.

1 (1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}$ (2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{-2}=z+1$

2 (1) $y=-2$ (2) $x=2,\ z=-1$

3 (1) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{5}$ (2) $x=6$

(3) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-5}$ (4) $x=3,\ z=1$

4 (1) $x=-5$ (2) $-4x+3y-5=0$

5 (1) 60° (2) 45°

6 (1) 4 (2) -1

7 (1) 1 또는 2 (2) -2

생각 넓히기 154쪽

은우: 2, 1, 서아: 1, 3, 0

스스로 확인하기 155쪽

01 (1) (왼쪽에서부터) a, $y-y_1$ (2) (왼쪽에서부터) b, $z-z_1$

(3) a, y_1 (4) ① 0 ② $\vec{u_2}$

02 (1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}$ (2) $4x+3y-10=0$

03 (1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=2(z-2)$ (2) $\frac{x-1}{-3}=y-2=\frac{z}{2}$

04 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_1}=(3,\ 1)$, $\vec{u_2}=(k,\ -1)$이므로

$\cos 45^\circ=\frac{|3\times k+1\times(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k-1|}{\sqrt{10}\sqrt{k^2+1}}$

즉, $\frac{|3k-1|}{\sqrt{10}\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{5k^2+5}=|3k-1|$

$2k^2-3k-2=0$, $(2k+1)(k-2)=0$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=2$이다.

05 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_1}=(k,\ 2,\ k+4)$, $\vec{u_2}=(2,\ k-3,\ 4)$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$이므로

$\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=(k,\ 2,\ k+4)\cdot(2,\ k-3,\ 4)=8k+10=0$

따라서 $k=-\frac{5}{4}$이다.

(2) 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 0이 아닌 임의의 실수 m에 대하여 $\overrightarrow{u_1}=m\overrightarrow{u_2}$가 성립하므로

$(k, 2, k+4)=(2m, km-3m, 4m)$

이때 $k=2m$, $k+4=4m$에서 $m=2$, $k=4$이다.

06 (1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z+1=t$ (t는 실수)라고 하면

$x=2t+1$, $y=3t+1$, $z=t-1$

따라서 ㉠, ㉡에 들어갈 식은 각각 $3t+1$, $t-1$이다.

(2) $\vec{u}=(2, 3, 1)$, $\overrightarrow{AH}=(2t, 3t-1, t-4)$이므로

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=(2, 3, 1)\cdot(2t, 3t-1, t-4)=14t-7=0$

즉, $t=\frac{1}{2}$이므로 $H\left(2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

05 평면과 구의 방정식 156~165쪽

생각 열기 156쪽

❶ 직선 l과 평면 α가 서로 수직이므로 직선 l은 평면 α 위의 직선 AP에 수직이다. 이때 $l\parallel\vec{n}$이므로 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$, 즉 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$이다.

❷ 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면은 하나로 결정되므로 점 P는 평면 α 위의 점이다.

1 (1) $-2x+y+2z-14=0$ (2) $z=-2$

2 (1) $x+2y+5z+3=0$ (2) $x-y-2z=0$

3 (1) $2x-3y+6z-6=0$ (2) $x-2z+2=0$

4 $\frac{x}{2}=-\frac{y}{3}=z-1$ **5** $(11, 5, -6)$

6 (1) 30° (2) 45°

7 $\frac{1}{3}$

8 (1) 2 (2) -2

9 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\sqrt{14}$

생각 넓히기 163쪽

1 $\vec{u}=(1, 1, \sqrt{2})$, $\vec{n}=(1, -1, \sqrt{2})$이므로

$$\cos\theta'=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{|1\times1+1\times(-1)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta'=60°$이다.

2 $\theta=90°-\theta'$이므로 $\theta=30°$이다.

10 $|\vec{p}-(3, 1, 4)|=5$

11 $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=11$

생각 넓히기 165쪽

1 $\overrightarrow{CH}=(x_1-1, y_1, z_1-1)$, $\vec{n}=(2, 2, 1)$이므로 $\overrightarrow{CH}=t\vec{n}$에서

$(x_1-1, y_1, z_1-1)=t(2, 2, 1)=(2t, 2t, t)$

따라서 $x_1=2t+1$, $y_1=2t$, $z_1=t+1$이므로

$H(2t+1, 2t, t+1)$이다.

2 점 $H(2t+1, 2t, t+1)$이 평면 α: $2x+2y+z-12=0$ 위의 점이므로

$2(2t+1)+2(2t)+(t+1)-12=0$, $9t-9=0$

즉, $t=1$이므로 점 H의 좌표는 $(3, 2, 2)$이다.

스스로 확인하기 166쪽

01 (1) a, c (2) $ax_1+by_1+cz_1+d$ (3) r^2

02 (1) $-2x+3y+2z-11=0$

(2) $x+3y+z-2=0$

03 두 평면의 방정식에서 x를 소거하면

$2y+z-6=0$

z를 y에 대한 식으로 나타내면

$z=-2(y-3)$ …… ㉠

두 평면의 방정식에서 y를 소거하면

$x-2z+5=0$

z를 x에 대한 식으로 나타내면

$z=\frac{x+5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 교선의 방정식은

$\frac{x+5}{2}=-2(y-3)=z$

04 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_1}=(1, 1, 1)$, $\vec{u_2}=(1, -1, k)$이므로

$$\cos 60°=\frac{|1\times1+1\times(-1)+1\times k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+k^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{3}\sqrt{2+k^2}}$$

즉, $\frac{|k|}{\sqrt{6+3k^2}}=\frac{1}{2}$이므로

$2|k|=\sqrt{6+3k^2}$, $k^2=6$

이때 $k>0$이므로 $k=\sqrt{6}$이다.

05 주어진 구의 중심을 C라고 하면 C(1, 0, −2)이므로 구의 중심과 평면 $2x+y-2z+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times1+0-2\times(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{3}$$

이때 구의 반지름의 길이는 1이고, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은 구의 중심과 평면 사이의 거리에서 구의 반지름의 길이를 뺀 값이므로

$$\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

06 (1) $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

(2) 점 P가 x축 위에 있으므로 임의의 양수 a에 대하여 P(a, 0, 0)이라고 하자.

이때 점 P는 구 S 위의 점이므로

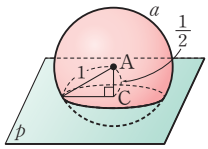
$a^2+(0-2)^2+(0-3)^2=14$, $a^2=1$

즉, $a=1$이므로 점 P의 좌표는 (1, 0, 0)이다.

(3) $\overrightarrow{CP}=(1, -2, -3)$이고, 평면 α는 점 P(1, 0, 0)을 지나므로 평면 α의 방정식은

$x-2y-3z-1=0$

(3) 예시 구 a의 반지름의 길이가 1이므로 평면 p와 구 a 사이의 거리는 $\frac{1}{2}$이다.



오른쪽 그림에서 평면 p와 구 a의 교선인 원의 반지름의 길이는

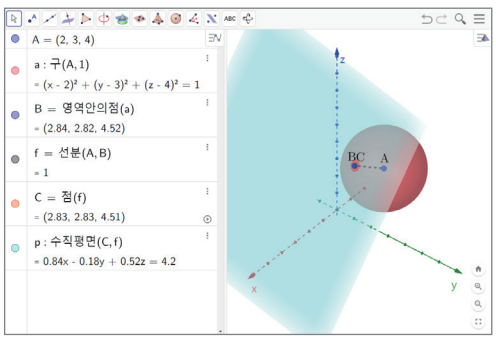
$$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\pi$$

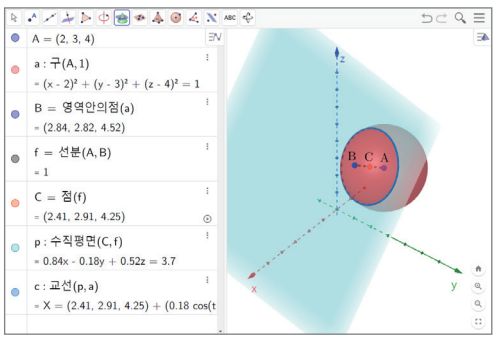
탐구하는 수학 167쪽

활동 1 (1)



평면 p와 구 a는 한 점에서 만난다.

(2)



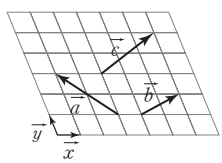
평면 p와 구 a의 교선은 원을 나타낸다.

대단원 마무리 평가 Ⅲ. 벡터 169~171쪽

01 ④	**02** $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{3}$		**03** $3\sqrt{3}$
04 $2\sqrt{2}$	**05** 3	**06** $\frac{16}{3}$	**07** 4
08 ③	**09** 1	**10** $\sqrt{74}$	
11 $8x+y-5z-18=0$		**12** 7	**13** 50
14 $\sqrt{82}$	**15** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$	**16** 4	

01 ④ $|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

02 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$를 놓으면



$\vec{a}=-2\vec{x}+2\vec{y}$, $\vec{b}=2\vec{x}+\vec{y}$,

$\vec{c}=3\vec{x}+2\vec{y}$

이므로

$3\vec{x}+2\vec{y}=p(-2\vec{x}+2\vec{y})+q(2\vec{x}+\vec{y})$

$=(-2p+2q)\vec{x}+(2p+q)\vec{y}$

즉, $-2p+2q=3$, $2p+q=2$에서

$p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{3}$

03 $2(\vec{a}+\vec{b})-3\vec{b}=2\vec{a}-\vec{b}$

$=2(2, 1, 0)-(-1, 3, 1)$

$=(5, -1, -1)$

따라서 벡터 $2(\vec{a}-\vec{b})-3\vec{b}$의 크기는

$\sqrt{5^2+(-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{3}$

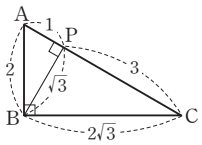
04 $|\vec{a}+k\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2=3^2+2k\times2+k^2\times2^2$

$=4k^2+4k+9=4\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+8$

따라서 $|\vec{a}+k\vec{b}|$의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

05 $\overline{AC}\cdot\overline{BP}=0$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{BP}$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서



$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:\sqrt{3}:2$

따라서 $\angle A=60^\circ$, $\angle C=30^\circ$,

$\angle ABP=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\overline{BA}\cdot\overline{BP}=|\overline{BA}||\overline{BP}|\cos30^\circ$

$=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

06 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ 3)\cdot(x,\ -2)=x-6=0$, 즉 $x=6$

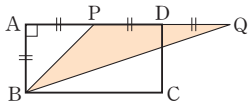
두 벡터 $\vec{b}$, $\vec{c}$가 서로 평행하므로 0이 아닌 임의의 실수 k에 대하여 $\vec{b}=k\vec{c}$가 성립한다.

$(6,\ -2)=k(2,\ y)=(2k,\ ky)$, 즉 $k=3$, $y=-\frac{2}{3}$

따라서 $x+y=6+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}$이다.

07 $2\overline{BP}=\overline{BA}+\overline{BD}$에서 $\overline{BP}=\frac{\overline{BA}+\overline{BD}}{2}$이므로 점 P는 선분 AD의 중점이다.

이때 $\overline{AQ}=-3\overline{DP}=3\overline{AP}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 선분 AQ를 1 : 2로 내분하는 점이다.



따라서 두 점 P, Q는 모두 직선 AD 위의 점이고 $\overline{PQ}=4$이므로 삼각형 BPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$

08 $\overline{OP}=\frac{2\overline{OA}+\overline{OB}}{3}$, $\overline{OQ}=\frac{2\overline{OB}+3\overline{OC}}{5}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=\frac{2\overline{OB}+3\overline{OC}}{5}-\frac{2\overline{OA}+\overline{OB}}{3}$

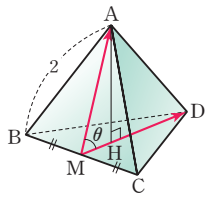
$=\frac{-10\overline{OA}+\overline{OB}+9\overline{OC}}{15}$

$=\frac{(\overline{OB}-\overline{OA})+9(\overline{OC}-\overline{OA})}{15}$

$=\frac{\overline{AB}+9\overline{AC}}{15}=\frac{1}{15}\overline{AB}+\frac{3}{5}\overline{AC}$

따라서 $a=\frac{1}{15}$, $b=\frac{3}{5}$이므로 $a+b=\frac{2}{3}$이다.

09 두 삼각형 ABC, BCD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로



$\overline{MA}=\overline{MD}=\sqrt{3}$

점 A에서 면 BCD에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 두 벡터 $\overline{MA}$, $\overline{MD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overline{MA}\cdot\overline{MD}=|\overline{MA}||\overline{MD}|\cos\theta$

$=|\overline{MA}|\cos\theta\times|\overline{MD}|$

$=|\overline{MH}||\overline{MD}|$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}$

$=1$

10 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=z-9=t$ (t는 실수)라고 하면

$x=2t+1$, $y=2t-1$, $z=t+9$

이므로 $P(2t+1,\ 2t-1,\ t+9)$로 놓을 수 있다. 즉,

$|\overline{OP}|=\sqrt{(2t+1)^2+(2t-1)^2+(t+9)^2}$

$=\sqrt{9t^2+18t+83}$

$=\sqrt{9(t+1)^2+74}$

따라서 선분 OP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{74}$이다.

11 구하는 평면은 직선 $\frac{x-1}{2}=-y=\frac{z+2}{3}$ 위의 점 $(1,\ 0,\ -2)$를 지난다.

한편, 구하는 평면의 방정식의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$라 하고, 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각

$\vec{n_1}=(2,\ -1,\ 3)$, $\vec{n_2}=(1,\ 2,\ 2)$

라고 하면 $\vec{n}\perp\vec{n_1}$, $\vec{n}\perp\vec{n_2}$이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(2,\ -1,\ 3)=2a-b+3c=0$

$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ 2,\ 2)=a+2b+2c=0$

즉, $a=-\frac{8}{5}c$, $b=-\frac{1}{5}c$이다.

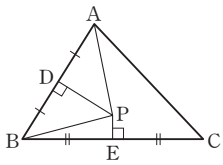
따라서 구하는 평면의 방정식은 점 $(1,\ 0,\ -2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(8,\ 1,\ -5)$이므로

$8(x-1)+y-5(z+2)=0$

$8x+y-5z-18=0$

12 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=2$이므로 $|\overrightarrow{AP}|=2$는 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 구를 나타내고, 점 P는 구 위의 한 점이다. 이때 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$이므로 $|\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은 $5+2=7$이다.

13 삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선의 교점이므로 점 P에서 두 선분 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 하면



$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$, $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos(\angle PAB)$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|=6\times3=18$ …… ㉮

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BC}|\cos(\angle PBC)$

$=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|=8\times4=32$ …… ㉯

따라서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}=18+32=50$ …… ㉰

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$의 값을 구했다.	40 %
㉯	$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값을 구했다.	40 %
㉰	$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값을 구했다.	20 %

14 $\frac{x}{3}=\frac{3-y}{3}=\frac{4-z}{8}=t$ (t는 실수)라고 하면 주어진 직선 위의 점의 좌표는

$(3t,\ -3t+3,\ -8t+4)$ …… ㉮

이 점은 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 위의 점이므로

$(3t)^2+(-3t+3)^2+(-8t+4)^2=25$

$82t^2-82t=0$, $82t(t-1)=0$

즉, $t=0$ 또는 $t=1$이므로

A(0, 3, 4), B(3, 0, −4)

또는 A(3, 0, −4), B(0, 3, 4) …… ㉯

따라서

$\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2+\{4-(-4)\}^2}=\sqrt{82}$ …… ㉰

단계	채점 요소	배점 비율
㉮	직선 위의 점의 좌표를 한 문자로 나타냈다.	30 %
㉯	두 점 A, B의 좌표를 구했다.	40 %
㉰	선분 AB의 길이를 구했다.	30 %

15 삼각형 ABC에서 선분 AD가 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$

즉, 점 D는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

따라서

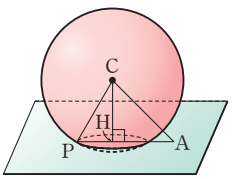
$|\overrightarrow{AD}|^2=\left(\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\right)$

$=\frac{1}{9}(4|\overrightarrow{AB}|^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2)$

$=\frac{1}{9}(4\times2^2+4\times4+4^2)=\frac{16}{3}$

이므로 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

16 주어진 구와 평면이 만나서 생기는 도형은 원이다. 주어진 구의 중심을 C라고 하면 C(3, 2, −2)이므로 점 C에서 주어진 평면에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H는 주어진 구와 평면이 만나서 생기는 원의 중심이고



$\overline{CH}=\frac{|3+2\times2-2\times(-2)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$

$\overline{AC}=\sqrt{(3-4)^2+(2-1)^2+(-2-2)^2}=3\sqrt{2}$

또, 주어진 평면과 선분 CH가 수직이고, 선분 AH는 주어진 평면 위의 선분이므로 $\overline{CH}\perp\overline{AH}$이다.

이때 직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$

이고, 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$

이므로 선분 AP의 길이의 최댓값은

$3+1=4$

수학 프로젝트 활동

172~173쪽

활동 1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=(42t+xt\cos\theta,\ 42t-xt\sin\theta)$

활동 2 $\theta=8^\circ$, $t=1$이므로

$\overrightarrow{AB}=(42+0.99x,\ 42-0.14x)$

이때 $\overrightarrow{AB}$의 y성분이 0이므로 $42-0.14x=0$에서

$x=300$

즉, $\overrightarrow{AB}=(339,\ 0)$이므로 $|\overrightarrow{AB}|=339$이다.

따라서 항공기의 비행 속도는 300 km/h이고, 두 지점 A, B 사이의 거리는 339 km이다.

찾아보기

용어

ㄱ

공간벡터 103
공간좌표 80
교선 58
(쌍곡선의) 꼭짓점 25
(타원의) 꼭짓점 18
(포물선의) 꼭짓점 12

ㄴ

내적 134

ㄷ

단위벡터 102
(타원의) 단축 18

ㅂ

방향벡터 146
법선벡터 151
벡터 102
벡터의 성분 122
벡터의 크기 102

ㅅ

삼수선 정리 66
시점 102
실수배 111
쌍곡선 25

ㅇ

영벡터 103
위치벡터 118
이면각 68
이면각의 면 68
이면각의 변 68
이면각의 크기 68
이차곡선 31

ㅈ

(타원의) 장축 18
(쌍곡선의) 점근선 29
정사영 72
종점 102
좌표공간 79
(쌍곡선의) 주축 25
(포물선의) 준선 12
(쌍곡선의) 중심 25
(타원의) 중심 18

ㅊ

(쌍곡선의) 초점 25
(타원의) 초점 18
(포물선의) 초점 12
(포물선의) 축 12

ㅌ

타원 18

ㅍ

평면벡터 103
포물선 12

기호

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ 80
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 102
$\vec{a}$ 102
$|\vec{a}|$ 102
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 134

자료 출처

사진 자료 출처

게티이미지코리아 ▶ 25, 44, 76

셔터스톡 ▶ 2, 8, 12, 18, 33, 34, 35, 45, 50, 51, 52, 65, 70, 71, 78, 79, 96, 97, 98, 102, 118, 131, 132, 133, 154, 157, 161, 167, 172, 173

출처 표시를 안 한 사진 및 삽화 등은 저작자 및 발행사에서 저작권을 가지고 있는 경우임.

인용 자료 출처

2 Keith James Devlin, 『The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible』, W. H. Freeman and Company, 2000

9 『수학동아』, 동아사이언스, 2020. 3., 60~61쪽

22 모리스 클라인, 『지식의 추구와 수학』, 김경화, 이혜숙 역, 이화여자대학교출판부, 1998, 85~108쪽

24 『과학동아』, 동아사이언스, 2002. 3., 120~121쪽
『제4차 산업혁명시대 미래직업가이드북』, 한국직업능력개발원, 2018, 212~215쪽
커리어넷(https://www.career.go.kr)

45 남호영, 정춘희, 김세식, 원유미, 『원뿔에서 태어난 이차곡선』, 수학사랑, 2012, 164~197쪽

71 LX공간정보연구원(https://lxsiri.re.kr)
워크넷(https://www.work.go.kr)

76 김형진, 윤용석, 최희정, 『와이즈만 과학사전』, ㈜창의와탐구, 2014, 238쪽
두산백과사전 두피디아(https://www.doopedia.co.kr)

85 김선희, 김기연, 『수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구』, 대한수학교육학회지, 2005, 340~343쪽

91 『과학동아』, 동아사이언스, 2009. 3., 100~101쪽

99 더크 스트릭, 『간추린 수학사』, 장경윤, 강문봉, 박경미 역, 신한출판미디어, 2020, 335쪽

110 오혜정, 『수학 언어로 건축을 읽다』, 지브레인, 2020, 133~135쪽

131 나카무라 간지, 『알기 쉬운 항공역학』, 권재상 역, 북스힐, 2017, 14쪽, 79쪽

145 고중숙, 『수학 바로 보기』, 텔림, 2013, 553~612쪽

172 K-공감누리집(https://gonggam.korea.kr)

집필진의 직접 집필인 경우 출처를 밝히지 않았음.

QR 코드 출처

10 https://code.jihak.co.kr/qr/Lhdv6yUgGAdF2EFc
16 https://code.jihak.co.kr/qr/j2JFMPo3EarVYuKv
17 https://code.jihak.co.kr/qr/1PJp88HuuZ2ZfW6f
23 https://code.jihak.co.kr/qr/gAiOWlKKnagsTDAb
33 https://code.jihak.co.kr/qr/4X9VrgLhlQFfiXAd
34 https://code.jihak.co.kr/qr/4cBecEBkxExjEiK0
44 https://code.jihak.co.kr/qr/I9XE0j9mD7bhpK2n
49 https://code.jihak.co.kr/qr/S1vzbqV28SXkPzBn
50 https://code.jihak.co.kr/qr/0Gqk9suodIVybacj
51 https://code.jihak.co.kr/qr/iLxRXyiE073mL7ns
54 https://code.jihak.co.kr/qr/Jd0pm8rK7PE8Q6vs
64 https://code.jihak.co.kr/qr/9870THtEikHDueos
70 https://code.jihak.co.kr/qr/BU9YzCdXrVLKzgOf
77 https://code.jihak.co.kr/qr/CqSBgqyd2b895fVY
86 https://code.jihak.co.kr/qr/7UGzaUIwDAAlT8tr
90 https://code.jihak.co.kr/qr/CqHvOYbE3jUjtZWR
95 https://code.jihak.co.kr/qr/DE0X8XEwdy7RGD7L
96 https://code.jihak.co.kr/qr/AwdeYDZFHAe69La8
97 https://code.jihak.co.kr/qr/ecewu996jXBy4BCN
100 https://code.jihak.co.kr/qr/rTJiO0l5rB3r94ss
117 https://code.jihak.co.kr/qr/WDg9Q3G5P6DckgXM
132 https://code.jihak.co.kr/qr/GO6scFUIOxGFptYA
133 https://code.jihak.co.kr/qr/LBAZFhGdLauyk9td
144 https://code.jihak.co.kr/qr/0lJBvPgbbBTfpSh6
155 https://code.jihak.co.kr/qr/7OAAtCIPAyOjHREZ
166 https://code.jihak.co.kr/qr/UGQ2r3WiEjVxeUBG
167 https://code.jihak.co.kr/qr/G5HVCviowfvXFNsE
171 https://code.jihak.co.kr/qr/zjnxyT6kjqVsjdjX

연구 위원

*○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)
○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)

* 표시는 대표 연구 위원임

집필진

*장경윤 집필 총괄
건국대학교 수학교육과 명예 교수

강현영 Ⅰ, Ⅲ단원 집필
목원대학교 수학교육과 교수

박보람 Ⅱ, Ⅲ단원 집필
아주대학교 수학과 교수

오세준 Ⅰ, Ⅱ단원 집필
홍익대학교 수학교육과 조교수

박윤근 Ⅲ단원 집필
양정고등학교 교감

김준엽 Ⅱ단원 집필
경문고등학교 교사

김현나 Ⅰ단원 집필
자양고등학교 교사

박진희 Ⅱ단원 집필
서울고등학교 교사

이승철 Ⅲ단원 집필
서울과학고등학교 교사

정주식 Ⅲ단원 집필
양정고등학교 교사

천화정 Ⅰ, Ⅱ단원 집필
덕수고등학교 교사

최승호 Ⅲ단원 집필
서울고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

심의 기관　○○○교육청

심의 위원

*○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)
○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)　○○○ (○○고등학교)

* 표시는 심의위원장임

편찬 기관

편찬 위원

○○○ (○○대학교)　○○○ (○○대학교)

편집 및 디자인

편집 책임 이성주　**편집** 김연희, 금나은, 유미현, 이승화, 문상우, 이다은, 석혜영, 정윤희, 손동국, 배예지, 이도희, 이지은
디자인 책임 김의수　**표지 디자인** 이창훈, 김소민　**내지 디자인** 오드디자인
표지 삽화 sujeanny.k　**내지 삽화** 강윤정, 양승용, 장현아　**조판** 동국문화　**컷** 최진환, 이석봉

교육부 장관의 위임을 받아 ○○○○○교육감이 2024년 0월 00일 인정 승인을 하였음.

고등학교　**기하**

20 . . . 초판 발행　**정가** 원
지은이 장경윤 외 11인
발행인 (주)지학사 (서울특별시 마포구 신촌로 6길 5)
인쇄인 벽호 (경기도 파주시 한빛로 43)

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 교육부와 한국교과서연구재단이 운영하는 교과서민원바로처리센터 (전화: 1566–8572, 웹사이트: http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부장관이 정하는 기준에 따라
사단법인 한국문학예술저작권협회 (02–2608–2800, www.kolaa.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠사업본부 수학팀 전화: (02) 330–5440 전송: (02) 325–8004
공급 업무 대행: (사)한국교과서협회 (경기도 파주시 문발로 439–1)
개별 구입 문의: (사)한국교과서협회 (홈페이지 주소 www.ktbook.com, 전화 031–956–8581~4)
ISBN: